MÉTODOS DE INTEGRACIÓN: INTEGRALES DE POTENCIAS TRIGONOMÉTRICAS

Recordemos algunas identidades de las funciones trigonométricas.

Identidades Reciprocas

1. $tanx = \frac{senx}{cosx}$
2. $cotx = \frac{cosx}{senx}$
3. $secx = \frac{1}{cosx}$
4. $cscx = \frac{1}{senx}$

Identidades Pitagóricas

5. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
6. $sec^2\alpha = 1 + tan^2\alpha$
7. $csc^2\alpha = 1 + cot^2\alpha$

Identidades de medio ángulo

8. $sen^2x = ½\,(1 - cos2x)$
9. $cos^2x = ½\,(1 + cos2x)$
10. $sen^2nx = ½\,(1 - cos2nx)$
11. $cos^2nx = ½\,(1 + cos2nx)$
12. $senxcscx = 1$
13. $cosxsecx = 1$
14. $tanxcotx = 1$
15. $1 - cosx = 2\,sen^2\,½\,x$
16. $1 + cosx = 2\,cos^2\,½\,x$
17. $sen2\alpha = 2sen\alpha cos\alpha$
18. $cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1$
19. $senxcosy = ½\,[sen\,(x-y) + sen\,(x+y)]$
20. $cosxseny = ½\,[sen\,(x+y) - sen\,(x-y)]$
21. $cosxcosy = ½\,[cos\,(x-y) + cos\,(x+y)]$
22. $sen(-x) = -senx$
23. $cos(-x) = cosx$
24. $senmxcosnx = ½\,[sen\,(m+n)x + sen\,(m-n)x]$
25. $senmxsennx = ½\,[cos\,(m-n)x - cos\,(m+n)x]$
26. $cosmxcosnx = ½\,[cos\,(m-n)x + cos\,(m+n)x]$

Integrales que son inmediatas.

Ejemplo 1.

$\int (sen^2 3y + cos^2 3y)dy$ por identidad.
$= \int (1)\, dy$
$= y + c$

Ejemplo 2.

$\int (3cos3x - 6sen2x + 8cot4x)dx$

$= \int 3cos3xdx - 6\int sen2xdx + 8\int cot4xdx$

$= \int 3cos3xdx - 6\int \frac{1}{2} sen2xdx * 2 + 8\int \frac{1}{4} cot4xdx * 4$

$= \int 3cos3xdx - \frac{6}{2}\int sen2xdx * 2 + \frac{8}{4}\int cot4xdx * 4$

$= sen3x - 3(-cos2x) + 2ln|sen4x| + c$

$= sen3x + 3cos2x + 2ln|sen4x| + c$

Ejemplo 3.

$\int cos^2 xsenxdx$

$= \int u^2(-du)$

$= -\int u^2 du$

$= -\frac{u^3}{3} + c$

$= -\frac{cos^3 x}{3} + c$

$$\begin{aligned} u &= cosx \\ du &= -senxdx \\ -du &= senxdx \end{aligned}$$

Ejemplo 4.

$\int 35z^4 sen(7z^5 - 3)dz$

$= \int sen(7z^5 - 3)35z^4 dz$

$= \int senudu$

$-cos\, u + c$

$= -\cos(7z^5 - 3) + c$

$$\begin{aligned} u &= 7z^5 - 3 \\ du &= 35z^4 \mathrm{dz} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.

$\int sec^2(5y)\sqrt[4]{tan^3(5y)}dy$

$\int tan^{\frac{3}{4}}(5y)sec^2(5y)dy$

$\int \frac{1}{5} tan^{\frac{3}{4}}(5y)sec^2(5y) * 5dy$

$= \frac{1}{5}\frac{tan^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + \mathrm{c} = \frac{4}{35} tan^{\frac{7}{4}} 5y + c = \frac{4}{35}\sqrt[4]{tan^7 5y} + c$

Ejemplo 6.

$\int (tan\alpha + cot\alpha)^2 d\alpha$

$\int (tan^2\alpha + 2tan\alpha cot\alpha + cot^2\alpha) d\alpha$ Como $tan\alpha cot\alpha = 1$

$\int (tan^2\alpha + 2 + cot^2\alpha) d\alpha$ Se reparte 1 a cada expresión.

$\int [(tan^2\alpha + 1 + cot^2\alpha + 1) d\alpha]^1$ aplicando identidades queda :

$\int (sec^2\alpha + csc^2\alpha) d\alpha \quad = \quad \int sec^2\alpha d\alpha + \int csc^2\alpha\, d\alpha$

$tan\alpha - cot\alpha + c$

Ejemplo 7.

$$\int \frac{sen(\ln 2x)}{x\sqrt{\cos(ln2x)}} dx$$

$$u = cos(ln2x)$$
$$du = -sen(ln2x)\frac{dx}{2x} * 2$$
$$-du = sen(ln2x)\frac{dx}{x}$$

$$\int (\cos(ln2x))^{\frac{1}{2}} sen(ln2x)^* \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{5} tan^{\frac{3}{4}}(5y) sec^2(5y) * 5dy$$

$$= \frac{1}{5}\frac{tan^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{7}{20} tan^{7/4} + c$$

FUNDAMENTACION TEÓRICA:

Cuando combinamos el método de sustitución con el uso adecuado de identidades trigonométricas, podemos integrar una amplia variedad de formas trigonométricas. Por lo general se consideran 5 tipos:

1. $\int sen^n dx \ y \ \int cos^n x dx$
2. $\int sen^m x. cos^n x\, dx$
3. $\int tan^n x dx \ y \ \int cot^n x dx$
4. $\int tan^m x\, sec^n x dx$
5. $\int sen\, mx \cos\, nx\, dx, \quad \int sen\, mx\, sen\, nx\, dx, \quad \int cos\, mx\, cosnx\, dx$

Las integrales de los tipos 1 a 4 se resuelven utilizando las identidades trigonométricas fundamentales y del ángulo medio. En las del tipo 5 se tiene en cuenta:

$senmxcosnx = ½ [sen\,(m+n)x + sen\,(m-n)x]$

$senmxsennx = ½ [cos\,(m-n)x - cos\,(m+n)x]$

$cosmxcosnx = ½ [cos\,(m-n)x + cos\,(m+n)x]$

1. $Integral\ Tipo \int sen^n x dx , \int cos^n\ x dx$

El objetivo es transformar la potencia dada en términos de las identidades a utilizar.

Si n es par utilizamos las fórmulas para la mitad del ángulo.

$$sen^2 x = ½\,(1 - cos 2x)$$
$$cos^2 x = ½\,(1 + cos 2x)$$

Si n es impar utilizamos la identidad principal $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

de la cual al despejar tenemos $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

Ejemplo 1:

$$\int sen^2 x dx$$
$$= \int ½\,(1 - cos 2x)\, dx$$
$$= ½ \int dx - ½ \int cos\ 2x\ dx = ½\, x - ½ \int cosu\ du/2$$
$$= ½\, x - ¼ \int cosu\ du = ½\, x - (-¼\ sen\ u) + c$$
$$= ½\,(x + ½\ sen\ 2x) + c$$

$u = 2x$
$du = 2dx$
$du/2 = dx$

Ejemplo 2:

$$\int cos^4 x\ dx = \int cos^2 x\ cos^2 x dx = \int (cos^2 x)^2 dx$$

$$\int cos^4 x\ dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{2\cos(2x)}{4} + \frac{cos^2(2x)}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1dx + 2\int \cos(2x) dx + \int cos^2(2x))\ dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\ sen\ (2x) + \frac{1}{4} \int cos^2\ (2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\ sen\ (2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\ sen\ (2x) + \frac{1}{8} \int (1 + \cos(4x))\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\ sen\ (2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\ sen\ (4x) + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\ sen\ (2x) + \frac{1}{32}\ sen\ (4x) + c$$

Ejemplo 3:

$Integral\ Tipo \int sen^n xdx = \int sen^{n-1} xsenx\, dx$

$$u = cosx$$
$$du = -senxdx$$
$$-du = senxdx$$

$$\int sen^3 xdx$$
$$= \int senx. sen^2 xdx$$
$$= \int senx\,(1 - cos^2 x)dx$$
$$= \int (senx. -senxcos^2\, x)dx$$
$$= \int senxdx - \int cos^2 xsenxdx$$
$$= -cosx - \int - u^2 du = -cosx + \int u^2\ du$$
$$= -cosx + \tfrac{1}{3}u^3 + c = -cosx + \tfrac{1}{3}cos^3 x + c$$
$$= \tfrac{1}{3}cos^3 x - cosx + c = \tfrac{1}{3}cosx(cos^2 x - 3) + c$$

Ejemplo 4:

$$u = 6x$$
$$du = 6dx$$
$$du/6 = dx$$

$$\int cos^2 3x\, dx$$
$$= \int ½\,(1 + cos6x)\, dx$$
$$= ½\int dx + ½\int cos6x\, dx$$
$$= ½\, x + ½\int cos6x\, dx$$
$$= ½\, x + ½\int cosu\frac{du}{6}$$
$$= ½\, x + \frac{1}{12}\int cosu\, du$$
$$= ½\, x + \tfrac{1}{12}senu + c = ½\, x + \tfrac{1}{12}sen6x + c$$
$$= ½\,(x + \frac{1}{6}sen6x\,) + c$$

Ejemplo 5:

$$u = senx$$
$$du = cosxdx$$

$$\int cos^5 x\, dx$$
$$= \int cos^4 x\, cosxdx$$
$$= \int (cos^2 x)^2 cosxdx$$
$$= \int (1 - sen^2 x)^2 cosxdx$$
$$= \int (1 - 2sen^2 x + sen^4 x)cosxdx$$
$$= \int cosxdx - \int 2sen^2 xcosxdx + sen^4 x\, cosxdx$$
$$= senx - 2\int u^2\, du + \int u^4\, du$$
$$= senx - 2 * \frac{u^3}{3}\ du + \frac{u^5}{5}\ du$$
$$= sen\, x - \frac{2}{3}sen^3 x + \frac{1}{5}sen^5 x + c$$

GUIA PARA INTEGRALES DE LA FORMA $\int sen^m x\, cos^n xdx$

1. Si m y n son ambos enteros pares, reducir los exponentes de sen^2x y cos^2x usando las fórmulas para la mitad de ángulo.

2. si n es impar, escribimos la integral como:
   $\int sen^m x\, cos^n xdx = \int sen^m x\, cos^{n-1} xdx$ y expresamos $cos^{n-1}x$ en términos de senx aprovechando la identidad trigonométrica $cos^2x = 1 - sen^2x$.
   Usar u = senx para evaluar la integral restante.

3. si m es entero impar, escribir la integral como:
   $\int sen^m x\, cos^n xdx = \int sen^{m-1} x\, cos^n dx$ y expresamos $\int sen^{m-1} x$ en términos de cosx aprovechando la identidad trigonométrica $sen^2x = 1 - cos^2x$.
   Aplicando la sustitución u = cosx para evaluar la integral restante.

$2. Integral\ Tipo\ \ \int sen^m x\, cos^n xdx$

Ejemplo 6:

m y n par $\int \boldsymbol{sen^2\, x\, cos^2\, x\ \ dx}$

$$\int sen^2\, x\, cos^2\, x\ \ dx = \int \frac{(1-COS2X)}{2}\,\frac{(1+COS2X)}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - cos^2(2x)\right)\, dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int(\frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2})\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{4} cos4x * 4\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\, x - \frac{1}{8}\, x + \left(\frac{1}{32}\, sen\,(4x)\right) + c$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\, sen\,(4x) + c$$

Ejemplo 7:

$\boldsymbol{m\ y\ n\ par \int sen^2\, x\, cos^4\, x\ \ dx = \int sen^2\, x\, cos^2\, xcos^2\, x\ \ dx}$

$$\int sen^2\, x\, cos^4\, x\ \ dx = \int \frac{(1-COS2X)}{2}\,\frac{(1+COS2X)}{2}\,\frac{(1+COS2X)}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int\left(1 - cos^2(2x)\right)(1 + cos2x)\, dx = \frac{1}{8}\int(1 + cos2x - cos^2 2x - cos^3 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int(1 + cos2x - \frac{1}{2}(1 + cos4x) - cos^2 2xcos2x)dx\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int(1 + cos2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos4x - (1 - sen^2 2x)cos2x)dx\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int(1 + \mathrm{cos2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{cos4x} - \mathrm{cos2x} + \mathrm{sen^2 2xcos2x})\mathrm{dx}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{cos4x} + \mathrm{sen^2 2xcos2x})\mathrm{dx}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \frac{1}{4} cos4xdx * 4 + \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\mathrm{sen^2 2x\,cos2xdx} * 2$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}sen4x + \frac{1}{16}\frac{\mathrm{sen^3 2x}}{3} + c = \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}sen4x + \frac{1}{48}\mathrm{sen^3 2x} + \mathrm{c}$$

Ejemplo 8:

m o n impar $\int \boldsymbol{sen^2 x cos^3 x\, dx}$

$u = senx$
$du = cosxdx$
$du/cosx = dx$

$= \int sen^2xcos^2xcosx\, dx$
$= \int sen^2x\,(1 - sen^2x)cosx\, dx$
$= \int (sen^2x - sen^4x)cosx\, dx$
$= \int (sen^2x\, cosx - sen^4xcosx)dx$
$= \int (sen^2x\, cosx - \int sen^4xcosx\, dx$
$= \int u^2\, cosx \frac{du}{cosx} - \int u^4 cosx \frac{du}{cosx} \quad = u^2du - \int u^4du$
$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{3}sen^3x - \frac{1}{5}sen^5x + c = sen^3x(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}sen^2x) + c$

Ejemplo 9 :

m o n impar $\int \boldsymbol{cos^2x\, sen^5xdx}$

$u = cosx$
$du = -senxdx$
$-du = senx\, dx$

$= \int cos^2xsen^4xsenxdx$
$= \int cos^2x\,(1 - cos^2x)^2senxdx$
$= \int cos^2x\,(1 - 2cos^2x + cos^4x)senxdx$
$= \int (cos^2x - 2cos^4x + cos^6x)senxdx$
$= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) - du$
$= \int (\,2u^4 - u^2 - u^6)du$
$= \frac{2}{5}sen^5x - \frac{1}{3}sen^3x + \frac{1}{6}sen^6x + c$

Ejemplo 10 :

m o n impar $\int \boldsymbol{sen^3\, x\, cos^2x\, dx}$

$u = cosx$
$du = -senxdx$
$-du = senx\, dx$

$\int sen^3\, x\, cos^2x\, dx = \int sen^2\, x\, cos^2x\;\; senx\, dx$
$= \int (1 - cos^2x)\;\, cos^2x\, (senx\, dx)$
$= \int cos^2x\, senx\, dx \; - \; \int cos^4x\, senx\, dx$

Remplazando en la integral tenemos:
$= \int u^2\;\, (-du) \;\; - \;\int u^4\;\, (-du)$

Integramos
$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \;=\; -\frac{cos^3x}{3} + \frac{cos^5x}{5} + c$

Ejemplo 11 :

m o n impar $\int \boldsymbol{sen^2\, x\, cos^5\, x\;\; dx}$

$u = senx$
$du = cosxdx$

$= \int sen^2x\, cos^4\, x\, cosx\, dx$
$= \int sen^2x\, (cos^2x)^2\, cosx\, dx$
$= \int sen^2\, x\, (1 - sen^2x)^2 \cos x\, dx$
$= \int sen^2x\, (1 - 2sen^2x + sen^4x)\;\, cosx\, dx$
$= \int sen^2x\, cosx\, dx - 2\,\int sen^4\, x\, cosx\, dx + \int sen^6\, x\, cosx\, dx$
$= \int u^2\;\, du - 2\,\int u^4\;\, du + \int u^6\;\, du$
$= \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{sen^3x}{3} + \frac{sen^5x}{5} + \frac{sen^7x}{7} + c$

3. $Integral\ Tipo \quad \int tan^n x dx, \quad \int cot^n\, xdx, \quad \int sec^n\, xdx, \quad \int csc^n\, xdx$

Si n es par se aísla sec^2x; el resto que tiene potencia par se pone en función de $tanx$ con $1 + tan^2x = sec^2x$ Para usar sec^2x en una integral por sustitución.

Ejemplo 12: $\int \boldsymbol{tan^4 xdx}$

$= \int tan^2xtan^2xdx = \int tan^2x\ (sec^2x - 1)dx$

$= \int tan^2xsec^2xdx - \int tan^2xdx$

$= \int tan^2xsec^2xdx - \int (sec^2x - 1)dx$

$= \int tan^2xsec^2xdx - \int sec^2xdx + \int dx$

$= \int u^2du - tanx + x + c = \frac{tan^3x}{3} - tanx + x + c$

$u = tanx$
$du = sec^2xdx$

Ejemplo 13: $\int \boldsymbol{sec^4\, x\, dx}$

$\int sec^4\, x\, dx = \int sec^2x\, csc^2\, x\, dx$

$= \int (1 + tan^2x)\ sec^2x\, dx$
$= \int sec^2x\ dx + \int tan^2x\, sec^2\, x\, dx$
$= tanx + \int u^2\ du$
$= \tan x + \frac{1}{3}u^3 + c$
$= \tan x + \frac{1}{3}tan^3\, x + c$

$u = tanx$
$du = sec^2xdx$

Ejemplo 14: $\int \boldsymbol{tan^5\, x\, dx}$

$\int \boldsymbol{tan^5\, x\, dx} = \int tan^4x\, tanx\, dx\ \int (sec^2x - 1)^2\ tanx\, dx$

$= \int (sec^4x - 2\, sec^2x + 1)\ tanx\, dx$

$= \int sec^4x\, tanx\, dx - 2\int sec^2x \tan x\, dx + \int tanx\, dx$

$= \int sec^3\, x\ (\, secx\, tanx)dx - 2\int secx\ (\, secx\, tanx)dx + \int tanx\, dx$

$= \int u^3\, du \quad - 2\int u\, du \quad - \quad \int tanx\, dx$

$= \frac{1}{4}u^4 - u^2 - \ln|secx| + c = \frac{1}{4}sec^4x - sec^2x - \ln|cosx| + c$

$u = secx$
$du = secxtanxdx$

Ejemplo 15: $\int \boldsymbol{cot^6\, 3x\, dx}$

$\int cot^6 3\, x\, dx = \int cot^4 3x\, cot^2 3\, x\, dx$

$= \int cot^4 3x\ (csc^2 3x - 1)\ \ dx$

$= \int\ cot^4 3x\ csc^2 3xdx - \int cot^4 3x\, dx$

$= \int\ cot^4 3x\ csc^2 3xdx - \int cot^2 3x\, cot^2 3xdx$

$= \int\ cot^4 3x\ csc^2 3xdx - \int cot^2 3x\ (csc^2 3x - 1)dx$

$= \int\ cot^4 3x\ csc^2 3xdx - \int cot^2 3x\ (csc^2 3x + \int cot^2 3x)dx$

$= \int cot^4 3x\ \ csc^2 3xdx - \int cot^2 3xcsc^2 3x\, dx + \int (csc^2 3x - 1)\, dx$

$= -\ \frac{1}{3}\frac{cot^5 3x}{5} + \frac{1}{3}\frac{cot^3 3x}{3} - \frac{1}{3}\cot 3x - x + c$

$= \int -\frac{1}{3}cot^4 3x\ csc^2 3x(-3)dx - \int -\frac{1}{3}cot^2 3xcsc^2 3x\ (-3)dx + \int -\frac{1}{3}csc^2 3x(-3)dx - \int dx$

$= \int u^4 \frac{du}{-3} - \int u^2 \frac{du}{-3} \quad - \quad \int csc^2 u\ du - x + c$

$u = cot3x$
$du = -3csc^2 3xdx$
$\frac{du}{-3} = csc^2 3xdx$

GUIA PARA EVALUAR INTEGRALES DE LA FORMA $\int tan^m x\, sec^n xdx$

1. si n es un entero par, escribimos la integral como: $\int tan^m x\, sec^n xdx = \int tan^m x\, sec^{n-2} xsec^2 xdx$ y expresar $sec^{n-2}x$ en términos de $tanx$, aprovechando la identidad $sec^2x = 1 + tan^2x$ usar la sustitución $u = tanx$ para evaluar la integral.

2. si m es entero impar, escribir la integral como: $\int tan^m x\, sec^n xdx = \int tan^{m-1} x\, sec^{n-1} xsecxtanxdx$
Como m-1 es par, $tan^{m-1}x$ puede expresarse en términos de secx, aprovechando la identidad $tan^2x = sec^2x - 1$ Usar la sustitución u = secx para evaluar la integral restante.

3. si m es par y n impar, emplear otro método, por ejemplo integración por partes.

4. $Integral\ Tipo \int sen^m x\, cos^n xdx$

Ejemplo 16:

$\int tan^2 xsec^4 xdx$

$= \int tan^2 xsec^2 xsec^2 xdx$

$= \int tan^2 x\, (tan^2 x + 1) sec^2 xdx$

$= \int u^2\, (u^2 + 1)\, du$

$= \int (u^4 + u^2)\, du$

$= \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}tan^5 x + \frac{1}{3}tan^3 x + c$

$u = tanx$
$du = sec^2 xdx$

Ejemplo 17:

$\int tan^3 xsec^5 xdx$

$= \int tan^2 xsec^4 x\, secx\, tanx\, dx$

$= \int (sec^2 x - 1)\, sec^4 x\, secx\, tanx\, dx$

$= \int (u^2 - 1)\, u^4 du$

$= \int (u^6 - u^4)\, du$

$= 1/7u^7 - 1/5u^5 + c$

$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{7}sec^7 x - \frac{1}{5}sec^5 x + c$

$u = secx$
$du = secxtanxdx$

Ejemplo 18: $\int \boldsymbol{cot^m x\, csc^n x\ dx}$ Si m es impar $\int \boldsymbol{cot^3 x\, csc^2 x\, dx}$

$\int cot^3 x\, csc^2 x\, dx = \int cot^2 x\ \ cscx\, cotx\, csc\, x\, dx$

Aplicando la identidad: $cot^2 x = csc^2 x - 1$

$= \int (csc^2 x - 1)\, cscx\, cotx\, cscx\ \ dx$

$= \int csc^3 x\, cotx\, cscx\, dx - \int cscx\, cotx\, cscx\, dx$

$= \int u^3(-du) - \int u\, (-du) = -\int u^3\, du + \int u\, du$

$= -\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^2 + c = -\frac{1}{4}csc^4 x + \frac{1}{2}csc^2 x + c$

$u = cscx$
$du = -cscxcotxdx$
$-du = cscxcotxdx$

Ejemplo 19:

$\int \boldsymbol{cot^4 x\, csc^4\, x\, dx}$

$u = cotx$
$du = -csc^2xdx$
$-du = csc^2xdx$

$\int cot^4 x\, csc^4\, x\, dx = \int cot^4\, x\, csc^2\, x\, csc^2 x\;\; dx$

Aplicando la identidad $csc^2 x = 1 + cot^2 x$ Tenemos:

$= \int\; cot^4 x\;\; (cot^2 x + 1)\;\; csc^2 x\;\; dx$

$= \int\; cot^6 xcsc^2 x\;\; dx + \int cot^4 x\;\; csc^2 x\;\; dx$

$= \int\; u^6(-du) + \int u^4\, (-du)\;\; = -\int u^6\;\, du\; - \int u^4\, du$

$= -\frac{1}{7}\, u^7 - \frac{1}{5}\, u^5 + c = -\frac{1}{7}\, cot^7 x - \frac{1}{5}\, cot^5 x + c$

$-u^5\left(\frac{1}{7}\, u^2 + \frac{1}{5}\right) + c = -\, cot^5 x(\frac{1}{7} cot^2 x + \frac{1}{5})\; + c$

EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios que aparecen a continuación, realice las integraciones que se indican:

1. $\int cos^2 4xdx$
2. $\int sen^5 5ydy$
3. $\int cos^7 3xdx$
4. $\int sen^4 3ydy$
5. $\int sen^3 xcos^4 x\; dx$
6. $\int cos^3 xsen^3 x\; dx$
7. $\int sen^5 2xcos2x\; dx$
8. $\int sen^2 xcos^4 x\; dx$
9. $\int sen3zcoszdz$
10. $\int senycos3ydz$
11. $\int cos3zcos4zdz$
12. $\int sec^4 xtan^3 x\; dx$
13. $\int sec^2 ytany\; dx$
14. $\int sec^2 ztan^2 z\; dx$
15. $\int sec^4 xtan^3 x\; dx$
16. $\int csc^2 3ycot3y\; dx$
17. $\int sec^3 ztanz\; dx$
18. $\int csc^4 xdx$
19. $\int sec^3 ydy$
20. $\int csc^6 zdz$

BIBLIOGRAFIA

- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Sexta Edición. 2012
- Leithold, Louis. Cálculo. Editorial Harla. 1998.
- Thomas, G., Finney R. Cálculo una variable. Editorial Pearson. Novena edición. 2006
- Larson, Edwars. Cálculo Tomo I. Editorial Mc-Graw Hill.
- Purcell – Valberg _Rigdon, Cálculo. Editorial Pearson. Octava Ediciòn. 2001
- Swokowski, Eael W. Cálculo. Grupo editorial Iberoamericano. 2002

Bibliografía Complementaria:

- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Editorial Thompson. Quinta Edición.
- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Editorial Thompson. Quinta Edición.
- Swokowski, Eael W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano.
- Granville, William. Cálculo diferencial e integral. Editorial Hispano-Americana

EJERCICIOS DE ESTUDIO

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

En los ejercicios que aparecen a continuación, realice las integraciones que se indican:

1. $\int sen^3 x\, dx$

2. $\int \cot x \csc^3 x\, dx$

3. $\int \cot^4 2x\, dx$

10. $\int \tan^3 x\, dx$

4. $\int \tan^{-3} t \sec^2 t\, dt$

5. $\int sen\, 4y \cos 4y\, dy$

6. $\int \cos^2 x\, dx$

17. $\int \cot x \sec^2 x\, dx$

7. $\int \tan^3 3y \sec^3 3y\, dy$

8. $\int \cos y \cos 5y\, dy$

9. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$

24. $\int sen^{\frac{1}{2}}\theta \cos^3 \theta\, d\theta$

11. $\int sen\, 3t\, sen\, t\, dt$

12. $\int \csc^3 \frac{2\omega}{3}\, d\omega$

13. $\int \sec^4 7x\, dx$

14. $\int \cos^3 x\, dx$

15. $\int e^x \cos^7 e^x\, dx$

16. $\int \frac{\cos\alpha + sen\,\alpha}{sen\, 2\alpha}\, d\alpha$

18. $\int \tan^4 2z \sec^6 2z\, dz$

19. $\int sen^4 2t \cos^4 2t\, dt$

20. $\int \cos^3 \theta\, sen^{-2}\theta\, d\theta$

21. $\int sen^7 3x \cos^2 3x\, dx$

22. $\int sen\, 3\varphi\, sen\, 6\varphi\, d\varphi$

23. $\int \frac{1 - \tan^2 \varepsilon}{\sec^2 \varepsilon}\, d\varepsilon$

25. $\int sen^4 5x\, dx$

26. $\int \sec^3 5\pi\, d\pi$

27. $\int \cot^3 x\, dx$

28. $\int \tan^5 t \sec^{-\frac{3}{2}} t\, dt$

29. $\int \frac{\sec^2 x}{\cot x}\, dx$

30. $\int sen\, 4x \cos 5x\, dx$

WEBGRAFIA

www.matebruknca.com

www.matematicatuya.com

www.fce.unam.edu.ar

http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001285/index.html

http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm

http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351

http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/

http://calculo.tripod.com/

http://www.itpuebla.edu.mx/alumnos/cursos_tutoriales/carlos_garcia_franchini/calculo/PaginasWeb/WebInicioCI.htm

http://pis.unicauca.edu.co/moodle-2.1.2/course/view.php?id=60

http://www.wolframalpha.com/input/?i=intregral+%28tanx%29%5E2%28secx%29%5E3