UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

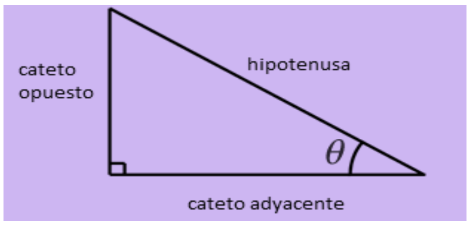
FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
CÁLCULO INTEGRAL

METODOS DE INTEGRACIÓN

GUIA No 5 - INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Repaso sobre definición de las razones trigonométricas:

Dado el triángulo rectángulo



Se definen las razones trigonométricas como:

$$sen\,\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$ctg\,\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$$

$$\sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{sen\ \theta}$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

La integración por sustitución trigonométrica sirve para integrar funciones que tienen la forma:

$\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$;

$a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$

$\sqrt{(a^2 - u^2)^n}$, $\sqrt{(a^2 + u^2)^n}$ y $\sqrt{(u^2 - a^2)^n}$

Este método se basa en el uso de triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras e identidades trigonométricas.

Para el método de sustitución trigonométrica se reemplaza el radical haciendo una sustitución adecuada. El resultado es un integrando que contiene funciones trigonométricas.

Se pueden hacer sustituciones trigonométricas usando las identidades trigonométricas

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

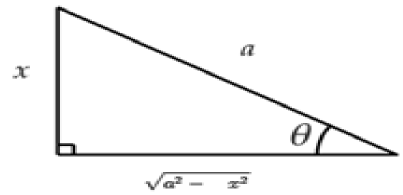
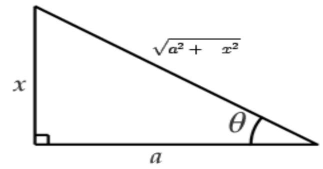
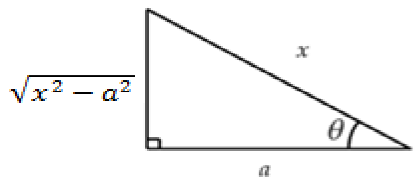
$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$$

$$tan^2\theta = sec^2\theta - 1$$

Por ejemplo, si alguno de las expresiones es de la forma, $a^2 - u^2$ o $\sqrt{a^2 - u^2}$; En este último caso hacemos $u = asen\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces

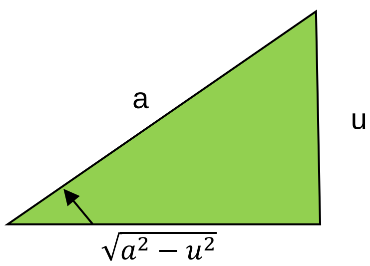
$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = \sqrt{a^2 cos^2\theta} = acos\theta$$

En la siguiente tabla se muestra cuál debe ser la sustitución:

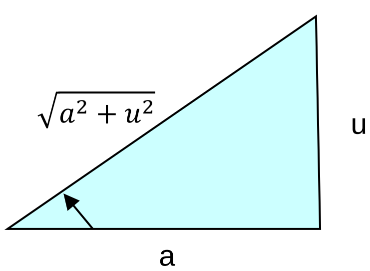
EXPRESIÓN EN EL INTEGRANDO	SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA	TRIANGULO UTILIZADO
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = asen\theta$	
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = atan\theta$	
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = asec\theta$	

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

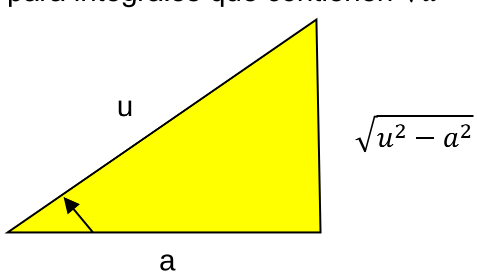
1. para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea u= asenɵ, entonces $\sqrt{a^2 - u^2}$ = $acos$ɵ



2. para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$ sea u= atanɵ, entonces $\sqrt{a^2 + u^2}$ = $asec$ɵ



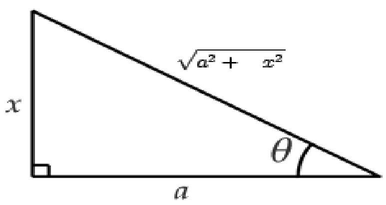
3. para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$ sea u = asecɵ, entonces $\sqrt{u^2 - a^2}$ = $atan$ɵ



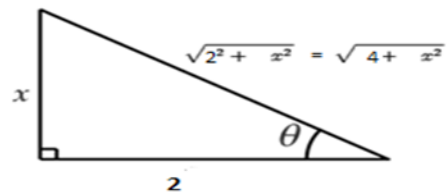
Ejemplo 1

Calcular la integral: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

Como podemos notar en el integrando tenemos una expresión equivalente a: $\sqrt{a^2+u^2}$ por lo tanto usaremos el triángulo que aparece en la segunda fila de la tabla, esto es:



Entonces:



Ahora buscaremos modificar los términos del integrando usando las funciones trigonométricas y el triángulo anterior, esto es:

$$\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = sec\theta$$

$$\frac{x}{2} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \tan\theta$$

Ahora despejamos en las ecuaciones de tal forma que obtengamos lo mismo que tenemos en el integrando:

$\sqrt{4+x^2} = 2sec\theta$ (1)

$x = 2tan\theta$ (2)

Como necesitamos el término x^2 basta con elevar al cuadrado ambos términos de la segunda ecuación, esto es:

$$x^2 = 4tan^2\theta$$

Nótese que aún nos falta calcular el diferencial en la integral original (dx), para calcularlo derivamos la ecuación en la que tenemos x de forma explícita (ecuación 2), de ahí obtenemos:

$$dx = 2sec^2\theta d\theta$$

Ahora que tenemos todos los términos del integrando realizamos la sustitución en una nueva integral, esto es:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2sec^2\theta d\theta}{(4tan^2\theta)(2sec\theta)}$$

Ahora simplificaremos y aplicaremos identidades trigonométricas, una forma simple es convertir todo en términos de funciones seno y coseno, esto es:

$$\int \frac{2sec^2\theta d\theta}{(4tan^2\theta)(2sec\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{sec\theta\ d\theta}{tan^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{cos\theta}}{\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}} d\theta$$

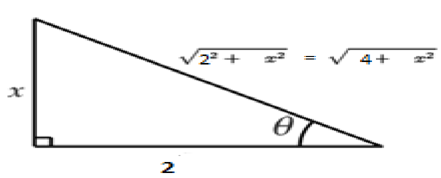
$$= \frac{1}{4}\int \frac{cos^2\theta}{cos\theta sen^2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta} d\theta$$

Ahora aplicaremos la técnica de sustitución para solucionar la nueva integral. Esto es: $u = sen\ \theta$, $\frac{du}{d\theta} = cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + c = -\frac{1}{4u} + c$$

$$= -\frac{1}{4sen\theta} + c$$

Ahora volvemos a usar el triángulo para encontrar la solución en términos de la variable original:



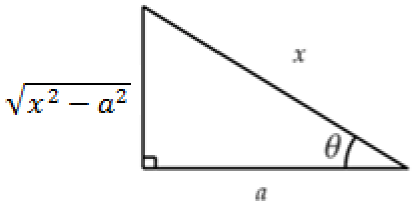
Acá vemos que: $sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

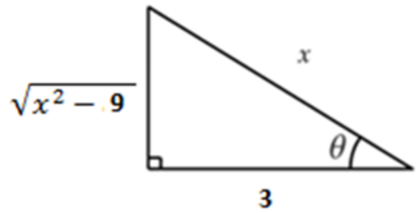
Por lo tanto: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{1}{4\left(\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)} + c = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$

Ejemplo 2

Calcular la integral: $\int \frac{\boldsymbol{x\,dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2-9}}}$

Como podemos notar en el integrando tenemos una expresión equivalente a: $\sqrt{x^2-9}$ por lo tanto usaremos el triángulo que aparece en la tercera fila de la tabla, esto es:





Estos son:

Buscamos los términos del integrando en el triángulo y hacemos la correspondiente sustitución trigonométrica:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = csc\ \theta$$

$$\frac{x}{3} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = sec\ \theta$$

$$x = 3sec\theta$$

Para calcular el diferencial dx buscamos la ecuación explícita para x y la derivamos, esto es: $dx = 3sec\theta tan\theta d\theta$

Ahora sustituimos en la integral original:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}} = \int csc\theta(sec\ \theta Tan\theta)d\theta = 3\int \frac{1}{cos\theta}\cdot\frac{1}{sen\theta}\cdot\frac{sen\theta}{cos\theta}d\theta$$

$$= 3\int \frac{d\theta}{cos^2\theta} = 3\int sec^2\theta d\theta = 3Tan\theta + c$$

Ahora usamos el triángulo inicial para volver a la variable original del ejercicio:

Como $Tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$ tenemos que: $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}} = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right) + c = \sqrt{x^2-9} + c$

Ejemplo 3:

Evaluar $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

$= \int \frac{2\text{cost}}{4sen^2t} 2\text{costdt}$

$= \int \frac{cos^2t}{sen^2t}\ dt$

$= \int cot^2dt$ Aplicamos la identidad

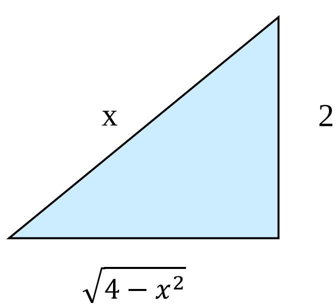
$= \int (csc^2t - 1)\ dt$

$= \int csc^2tdt - \int dt$

$= -cot\ t - t + c$

$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - sen^{-1}\frac{x}{2} + c$

$x = 2sent$
$dx = 2costdt$
$x^2 = 4sen^2t$
$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4sen^2t}$
$= \sqrt{4(1-sen^2t)}$
$= \sqrt{4cos^2t}$
$= 2cost$



Ejemplo 4:

Evaluar $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

$\sqrt{9-x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$,

Aquí: a= 3; u = x; Usamos la sustitución $x = asen\theta$

$x = asen\theta\,; x = 3sen\theta\,; dx = 3cos\theta d\theta;\ x^2 = 9sen^2\theta$

$Así\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9sen^2\theta} = \sqrt{9(1-sen^2\theta)} = \sqrt{9cos^2\theta} = 3cos\theta$

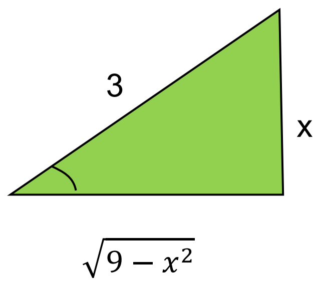
Reemplazando en $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3cos\theta d\theta}{9sen^2\theta 3cos\theta}$

$= \int \frac{d\theta}{9sen^2\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta}$

$= \frac{1}{9}\int csc^2\theta d\theta = \frac{1}{9}\,(-cot\theta) + c = -\frac{1}{9}cot\theta$

$= -\frac{1}{9} * \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$



Ejemplo 5:

Evaluar $\int \frac{\sqrt{x^2-3}\,dx}{x}$

$\sqrt{x^2-3}$ es de la forma $\sqrt{u^2-a^2}$,

Aquí: a= $\sqrt{3}$; u = x; Usamos la sustitución $x = asec\theta$

$x = asec\theta; x = \sqrt{3}sec\theta;\ dx = \sqrt{3}sec\theta tan\theta d\theta;\ x^2 = 3sec^2\theta$

$Así\ \sqrt{x^2-3} = \sqrt{3sec^2\theta - 3} = \sqrt{3(sec^2\theta-1)} = \sqrt{3tan^2\theta} = \sqrt{3}tan\theta$

$\int \frac{\sqrt{x^2-3}\,dx}{x}$

Reemplazando en $\int \frac{\sqrt{x^2-3}\,dx}{x} = \int \frac{\sqrt{3}tan\theta}{\sqrt{3}sec\theta}\sqrt{3}sec\theta tan d\theta$

$= \int \sqrt{3}tan\theta tan d\theta$

$= \int \sqrt{3}tan^2\theta d\theta$

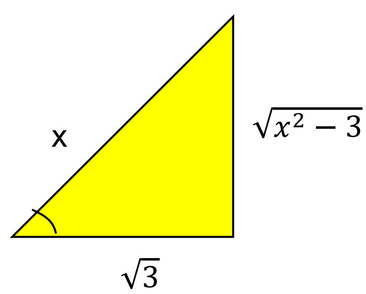
$= \sqrt{3}\int(sec^2\theta - 1)d\theta$

$= \sqrt{3}(\int sec^2\theta d\theta - 1\int d\theta)$

$= \sqrt{3}(tan\theta - \theta)$

$= \sqrt{3} * \left(\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{3}} - cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{x}\right) + c$

u = x , a = $\sqrt{3}$
$x = \sqrt{3}sec\theta$
$dx = \sqrt{3}sec\theta tan\theta d\theta$
$x^2 = 3sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-3} = \sqrt{3}tan\theta$



Ejemplo 6: Evaluar

$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{dx}$

$= \int sec\theta\, sec^2\theta d\theta = \int sec^3\theta\, d\theta$

$= \int sec\theta(1+tan^2\theta)\, d\theta$

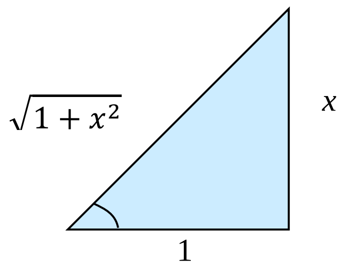
$= \int sec\theta d\theta + \int sec\,\theta tan^2\theta\, d\theta$

$= \int sec\theta\, d\theta + \int sec\theta tan\theta tan\theta d\theta$ Se realiza por partes

$= \frac{1}{2} sec\theta tan\theta\ +\ \frac{1}{2} Ln\ |sec\theta\ +\ tan\theta|\ +\ c$

$= \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}\ +\ \dfrac{1}{2}\ Ln\ |\sqrt{1+x^2}\ +\ x|\ +\ c$

$x = tan\theta$
$dx = sec^2\theta d\theta$
$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+tan^2\theta}$
$= \sqrt{sec^2\theta}$
$= sec\theta$



Ejemplo 7: Evaluar

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

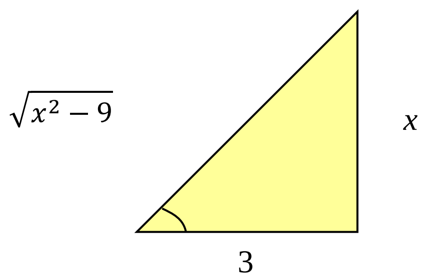
$= \int \dfrac{3sec\theta tan\theta d\theta}{3tan\theta}$

$= \int 3sec\theta d\theta$

$= 3Ln\ |\ sec\theta\ +\ tan\theta\ |$

$= 3Ln\ |\ \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + \frac{x}{3}\ |\ +\ c = 3Ln\ |\ \frac{\sqrt{x^2-9}+x}{3}|\ +\ c = (3 - ln3Ln\ |\ \sqrt{x^2-9} + 3|\ +\ c$

u = x , a = 3
$x = 3sec\theta$
$dx = 3sec\theta tan\theta d\theta$
$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9sec^2\theta - 9}$
$= \sqrt{9(sec^2\theta - 1)}$
$= \sqrt{9tan^2\theta}\ = 3tan\theta$



Ejemplo 8: Evaluar

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

$= \int acost.acost\ dt$

$= \int a^2cos^2t\ dt$

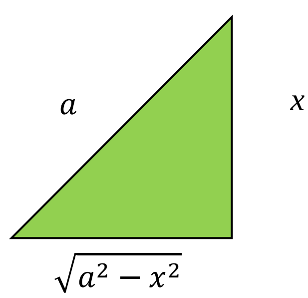
$= a^2\int cos^2t\ dt = a^2\ \int \frac{1+cos2t}{2} dt$

$= \frac{a^2}{2}\int(1+cos2t)\ dt$

$= \frac{a^2}{2}\left(t\ + \frac{1}{2}sen2t\right) dt$

$= \frac{a^2}{2}sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\ +\ c$

$x = asent$
$dx = acostdt$
$sent = \frac{x}{a}$
$t = sen^{-1}\frac{x}{a}$



INTEGRALES DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Ejemplo 9:

$\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$

$20 + 8x - x^2 = 0$

$0 = x^2 - 8x - 20$

$20 + C = x^2 - 8x + C$

$C = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$C = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$20 + 16 = x^2 - 8x + 16 \rightarrow$ Trinomio cuadrado perfecto

$36 = (x-4)^2$

$36 - (x-4)^2 = 0$

$u^2 = (x-4)^2$ $\qquad$ $a^2 = 36$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados $\qquad$ aplicamos raíz cuadrada a ambos lados

$u = x - 4$ $\qquad$ $a = 6$

$du = dx$

Posteriormente se reemplazan los valores en la integral inicial

$\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x^2-8x+16)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\ sen\ \frac{u}{a} + C$

$= arc\ sen\ \frac{X-4}{6} + C$

Ejemplo 10

$\int \frac{(2x+3)}{9x^2-12x+8}\, dx$

$u = 9\,x^2 - 12x + 8$

$du = (\,18x - 12)dx$

Se multiplica por 9 a la función $(2x+3)$ para que de $18x$. Así como se multiplica por 9 también se divide por 9 para que no se altere la función inicial.

$9 * (2x+3) = 18x + 27\ ver\ paso\ (1).$

Posteriormente se suma a: -12 con el # 27 (pero con signo contrario)

-12
-27
-39 → este resultado ahora se suma, pero con signo contrario ver paso **2**

$$\int \frac{(2X+3)}{9x^2-12x+8}\, dx = \frac{1}{9} \int \frac{(18X+27)}{9x^2-12x+8}\, dx = \frac{1}{9} \int \frac{[(18x-12)+39]}{9x^2-12x+8}\, dx$$

$paso\ (1)$ $\qquad$ Paso (2)

$$= \frac{1}{9} \int \frac{(18X-12)}{9x^2-12x+8}\, dx + \frac{39}{9} \int \frac{dx}{9x^2-12x+8}$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{(18X-12)}{9x^2-12x+8}\, dx + \frac{13}{3} \int \frac{dx}{9x^2-12x+8}$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{9} \ln|u| = \frac{1}{9} \ln|9x^2 - 12x + 8|$$

Ahora la integral $\frac{13}{3}\int\frac{dx}{9x^2-12x+8}$ se desarrolla utilizando las fórmulas de integrales inversas trigonométricas

$9x^2-12x+8=0$

$(9x)^2-12(9x)+8\,(9)=0 \quad \rightarrow trinomio\ de\ la\ forma\ ax^2+bx+c$

$(9x)^2-12(9x)+72=0 \quad \rightarrow\ C=\left(\frac{b}{2}\right)^2 = C=\left(\frac{12}{2}\right)^2 = \quad C=(6)^2=36$

$(9x)^2-12(9x)+C=-72+C$

$(9x)^2-12(9x)+36=-72+32$

$\frac{(9X-6)(9X-6)}{9}=\frac{-36}{9}$

$\frac{(9X-6)}{3}*\frac{(9X-6)}{3}+\frac{36}{9}=0$

$(3X-2)*(3X-2)+4=0$

$(3X-2)^2+4=0$

$\frac{13}{3}\int\frac{dx}{9x^2-12x+8}=\frac{13}{3}\int\frac{dx}{(X-2)^2+4} = \frac{13}{3}\int\frac{du}{u^2+a^2}$

$u^2=(x-2)^2$ Sacamos raíz cuadrada a ambos términos

$u=x-2$

$du=dx$

$a^2=4$ Sacamos raíz cuadrada a ambos lados

a = 2

por lo tanto, la integral

$\frac{13}{3}\int\frac{du}{u^2+a^2} =$

$\frac{13}{3}*\frac{1}{a}\ arc\ tan\frac{u}{a}+C$

$\frac{13}{3}*\frac{1}{2}\ arc\ tan\frac{u}{a}+C$

$\frac{13}{6}\ arc\ tan\frac{(3X-2)}{2}+C$

Ahora unimos las dos respuestas

$\frac{1}{9}\ln|9x^2-12x+8|+\frac{13}{6}\ arc\ tan\frac{(3X-2)}{2}+C$

Ejemplo 11

$\int\frac{secx\ tanx\ dx}{9+4sec^2x}$

$u^2=4\ sec^2x$ Sacamos raíz cuadrada a ambos lados $\quad a^2=9$

$u=2secx \quad a=3$

$du=2\ secx\ tanx\ dx$

$\frac{du}{2}=secx\ tanx\ dx$

$\frac{1}{2}\int\frac{u}{a^2+u^2} = \frac{1}{2}*\frac{1}{3}\ arc\tan\frac{u}{a}+C$

$=\frac{1}{6}\ arc\tan\frac{2\ secx}{3}+C \longrightarrow$ **fórmula inversa trigonométrica**