GUÍA INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

El método de fracciones parciales se utiliza cuando quiere integrarse una expresión de la forma $\frac{q(x)}{p(x)}$, donde el numerador y el denominador son polinomios y el grado de $Q(x) es\ menor\ que\ el\ grado\ de\ P(x)$. **Si el grado de $Q(x)$ es mayor o igual que el grado de $P(x)$, debe utilizarse el algoritmo de la división.**

Por el teorema fundamental del álgebra se sabe que el polinomio $P(x)$ puede factorizarse en polinomios irreducibles de grado uno y de grado dos.

Entonces se tienen cuatro casos a saber: Factores lineales diferentes, Factores lineales repetidos, Factores Cuadráticos diferentes y Factores cuadráticos repetidos y en adelante las combinaciones.

CASO 1: $P(x)$ se factoriza como un producto de factores de grado uno todos distintos; es decir, $p(x) = (a_1x + b_1x)(a_2x + b_1)\ldots(a_nx + b_n)$. Entonces existen números reales $A_1, A_2, \ldots A_n$ tales que:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_1)} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)}$$

Por lo tanto $$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\, dx = \int \frac{A_1}{(a_1x+ b_1)}\, dx + \int \frac{A_2}{(a_2x+ b_1)}\, dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(a_nx+ b_n)}\, dx$$

Ejemplo 1: $\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$

Se descompone la fracción y se factoriza el denominador.

$$\frac{1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A\,(x+4)+B\,(x-1)}{(x-1)\ (x+4)} = \frac{Ax+4A+Bx-B}{(x-1)\quad(x+4)}$$

Se ordena el numerador en la expresión de la derecha, se factoriza y se agrupan términos independientes

$$\frac{1}{(x-1)(x+4)} = \frac{(A+B)x+(4A-B)}{(x-1)\ (x+4)}$$

Como los denominadores son los mismos en la expresión, se igualan los numeradores:

$1 = (A + B)x \ + \ (4A - B)$

Se igualan los términos semejantes a lado y lado de la igualdad, o sea:

$0 = A + B$

$1 = 4A - B$

Se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y utilizando cualquiera de los métodos conocidos se hallan los valores de A y B.

Por eliminación de una de las variables se tiene:

1= 4A – B

0= A + B

1 = 5A

A = $\frac{1}{5}$

Sustituyendo A en cualquiera de las dos ecuaciones, se halla el valor de B, siendo: B= $-\frac{1}{5}$

Se remplazan los valores de A y B, con lo cual la fracción original se transforma en:

$$\frac{1}{(x-1)(x+4)} = \frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{5}}{x+4}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{x-1} - \frac{\frac{1}{5}}{x+4}$$

Reemplazando en la integral original, se tiene

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+4)} = \int \frac{\frac{1}{5}}{(x-1)} - \frac{\frac{1}{5}}{(x+4)} \, dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+4} = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\ln|x+4| + c$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right| + c$$

Ejemplo 2: $\int \frac{2x-1}{x^2+x-2} dx$

En esta integral el denominador se factoriza al igual que el caso 1, o sea:

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}$$

Se descompone la fracción:

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x+2)}$$

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)\;(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)}$$

Como los denominadores son los mismos, se igualan los numeradores

$$2x - 1 = (A+B)x + (2A-B)$$

En esta expresión se igualan los términos semejantes que se encuentran a lado y lado de igualdad.

$$2 = A + B$$

$$-1 = 2A - B$$

Se resuelve este sistema con lo cual A = $\frac{1}{3}$ y B= $\frac{5}{3}$ Se sustituye A y B, quedando la fracción original

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}}{x+2}$$

Se reemplaza en la integral original

$$: \int \frac{(2x-1)dx}{x^2+x-2} = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\ln|x+2| + c = \frac{1}{3}[\ln(x-1) + 5\ln(x+2)] + c$$

$$= \frac{1}{3}[ln(x-1)(x+2)^5] + c$$

CASO 2: $P(x)$ se factoriza como un producto de factores de grado uno todos repetidos; Es decir,

$P(x) = (ax+b)^n$. Entonces existen números reales $A_1, A_{2,\ldots\ldots} A_n$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{(ax+b)}\,dx + \int \frac{A_2}{(ax+b)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(ax+b)^n}\,dx$$

Ejemplo 3: $\int \frac{(2-x)dx}{x\,(9x^2-12x+4\,)}$

Para que esta integral pueda resolverse por el caso II el trinomio que aparece en el denominador debe ser factorizable. Una vez que se compruebe se descompone la fracción en fracciones parciales.

$$\frac{(2-x)}{x\,(\,9x^2-12x+4)} = \frac{(2-x)}{x\,(3x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(3x-2)} + \frac{C}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{A(3x-2)^2+Bx\,(3x-2)+Cx}{x\,(3x-2)^2}$$

$$= \frac{9AX^2-12Ax+4A+3Bx^2-2Bx+Cx}{x\,(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(9A+3B)x^2+(C-2B-12A)x+4A}{x\,(3x-2)^2}$$

Se igualan los numeradores de esta expresión $2 - x = (9A + 3b)\,x^2 + (\,C - 2B - 12A)x + 4A$

Se igualan los términos semejantes que aparecen a lado y lado de la igualdad.

2 = 4A

-1 = C-2B-12A

0= 9A + 3B

Resolviendo el sistema anterior se obtiene:

A = $\frac{1}{2}$ Y B= $\frac{-3}{2}$ y C= 2

Sustituyendo estos valores en la fracción inicial, se tiene:

$$\frac{(2-x)}{x\,(\,9x^2-12x+4)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{3}{2}}{(3X-2)} + \frac{2}{(3X-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2x} - \frac{3}{2(3X-2)} + \frac{2}{(3X-2)^2}$$

Reemplazando la integral original queda:

$$\int \frac{(2-x)dx}{x(9X^2-12x+4)} = \int \frac{1}{2x} - \frac{3}{2\,(3x-2)} + \frac{2}{(3x-2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{3\,dx}{3x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{3(3x-2)^{-2}dx}{1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln|3x-2| - \frac{2}{3\,(3x-2)} + c$$

CASO 3: $P(x)$ se factoriza como un producto de factores irreducibles de grado dos todos distintos; es decir, $p(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2x + b_2x + c^2)\ldots(a_nx^2 + b_nx + c_n)$. Entonces existen números reales $A_{1,}A_{2,\ldots\ldots}A_n$ y $B_{1,}B_{2,\ldots\ldots}B_n$ tales que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1)} + \frac{A_2X+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \cdots + \frac{A_nX+B_n}{(a_nx^2x+b_nx+c_n)}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(a_1x^2x + b_1x + c_1)}\,dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)}\,dx + \cdots + \int \frac{A_nx + B_n}{(a_nx^2 + b_nx + c_n)}\,dx$$

Ejemplo 4:

Integrar. $\int \frac{(7x+1)dx}{(x^2-3)(x^2+1)}$

Se descompone en fracciones parciales la fracción

$$\frac{7x+1}{(x^2-3)\,(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-3} + \frac{Cx+D}{x+1}$$

$$\frac{7x+1}{(x^2-3)\,(x^2+1)} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-3)}{(x^2-3)(x^2+1)} = \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3-3Cx+Dx^2-3D}{(x^2-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{7x+1}{(x^2-3)\,(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A-3C)x+(B-3D)}{(x^2-3)(x^2+1)}$$

Se igualan los numeradores de la expresión anterior

$$7x + 1 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (A - 3C)x + (B - 3D)$$

Se igualan los términos semejantes que aparecen a lado y lado de la expresión, se tiene:

A+C = 0 B+D =0

A-3C =7 B-3D = 1

Se resuelve este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y se obtiene:

A = $\frac{7}{4}$ B= $\frac{1}{4}$ C= $\frac{-7}{4}$ D= $\frac{-1}{4}$

Se sustituye en la fracción original estos valores y se tiene:

$$\frac{7x+1}{(x^2-3)\,(x^2+1)} = \frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2-3} + \frac{\frac{-7}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+1}$$

$$\int \frac{(7x+1)dx}{(x^2-3)(x^2+1)} = \int\left(\frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2-3} + \frac{\frac{-7}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2-3}\,dx + \int \frac{\frac{-7}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{(7x+1)dx}{(x^2-3)(x^2+1)} = \frac{7}{4}\int \frac{x\ dx}{x^2-3} - \frac{7}{4}\int \frac{x\ dx}{x^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-3}$$

$$\int \frac{(7x+1)dx}{(x^2-3)(x^2+1)} = \frac{7}{8}\ ln|x^2 - 3| - \frac{7}{8}\ ln|x^2 + 1| - \frac{1}{4}\ arc\tan x + \frac{1}{4} * \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right] + c$$

Se reemplaza en la integral original, teniendo

$$\int \frac{(7x+1)dx}{(x^2-3)(x^2+1)} = \frac{7}{8} ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+1}\right| + \frac{1}{8\sqrt{3}}\ ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{4}\ arc\tan x + c$$

CASO 4: $P(x)$ se factoriza como un producto de factores irreducibles de grado dos todos repetidos; es decir, $P(x) = (ax^2 + bx + c)^n$.entonces existen números reales $A_1,A_{2,\ldots\ldots}A_n$ y $B_1,B_{2,\ldots\ldots}B_n$ tales que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2X + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nX + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\, dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)}\, dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2}\, dx + \cdots + \int \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx$$

Ejemplo 5:

Calcular: $\int \frac{2x^3\, dx}{(x^2+1)^2}$

Se descompone en fracciones parciales la fracción

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}$$

Igualando numeradores en la expresión anterior, se tiene

$$2x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

Se hace

2 = A; 0 = B ; A+C = 0 ; B+D = 0

Se resuelve el sistema y se obtiene

A = 2 B = 0 C = -2 Y D = 0

Se sustituye estos valores en la fracción inicial, esto es

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+0}{x^2+1} + \frac{-2x+0}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Reemplazando en la integral original se obtiene

$$\int \frac{2x^3\, dx}{(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{2x\, dx}{x^2+1} - \int \frac{2x\, dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= ln\,(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2+1} + C$$

NOTA: En una integral pueden aparecer los casos combinados y entonces se aplican los casos correspondientes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \frac{11x+2}{2x^2-5x-3}dx$

2. $\int \frac{y^2+2}{y^3+4y^2+y-6}dy$

3. $\int \frac{4z^2+13z-9}{z^3+2z^2-3z}\,dz$

4. $\int \frac{4x^2+54x+134}{(x-1)(x+5)(x+3)}\,dx$

5. $\int \frac{2y^2-25y-33}{(y+1)^2(y-5)}\,dy$

6. $\int \frac{2x^2+x}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$

7. $\int \frac{6z^3+78z}{(z^2+13)^2}dz$

8. $\int \frac{y^3+3y^2+3y+63}{(y^2-9)^2}\,dy$

9. $\int \frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^3}\,dx$

10. $\int \frac{y^6-y^3+1}{y^4+9y^2}\,dy$