TEMA: La integral definida: Teorema fundamental del cálculo.

INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema Fundamental del Cálculo

Área bajo la curva de una región

Área entre dos regiones

Volumen de sólidos de Revolución.

COMPETENCIA:

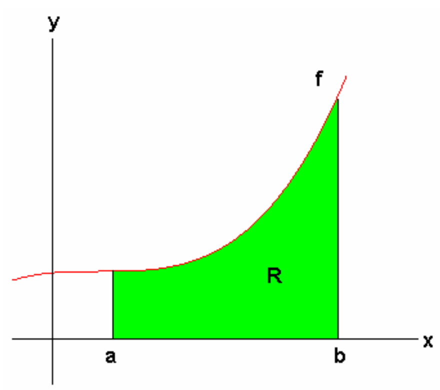
- ✓ Resolver integrales aplicando el teorema fundamental del cálculo.
- ✓ Interpretar adecuadamente el concepto de integral definida y aplicarlo.

INTEGRAL DEFINIDA

El concepto de integral definida está relacionado geométricamente con el valor que determina el área bajo la curva dada por una función $f(x)$en un intervalo $[a, b]$

CONCEPTO: Si f es continua y no negativa en un intervalo cerrado [a,b] el área de una región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a \; y \; x = b$ viene dada por:

$$\text{Area} = \int_a^b f(x)dx$$



Se ve que f es una función continua, positiva (por encima del eje x), la región R está limitada con $x = a \; y \; x = b$, podemos hallar el área de la región R por medio de una integral definida.

FUNDAMENTACION TEÓRICA:

El teorema fundamental del cálculo es importante al proporcionar una herramienta poderosa para evaluar integrales definidas. La regla de Barrow dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva G(x) de f(x), en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Sea f continua (y de aquí integrable) en cualquier punto del intervalo $[a,b]$ y sea F cualquier antiderivada de f en $[a,b]$. Entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

APLICACIONES:

El teorema fundamental del cálculo permite determinar el valor de la integral definida de tal forma que amplía la gama de aplicaciones en este campo. Algunas de las aplicaciones se evidencian en la física al determinar la velocidad y aceleración de una partícula cuando conocemos la ecuación matemática de su aceleración, en la geometría al esclarecer el área bajo la curva, el área entre dos curvas, el área de arandelas, el volumen de sólidos de revolución siempre que se conozca la función matemática a que se hace referencia.

TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ANGULOS NOTABLES:

θ	$0 = 2\pi$ 360^0	$30^0 = \frac{\pi}{6}$	$60^0 = \frac{\pi}{3}$	$45^0 = \frac{\pi}{4}$	$90^0 = \frac{\pi}{2}$	$180^0 = \pi$	$270^0 = \frac{3\pi}{2}$
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	∞	0	∞
Cot	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	0	∞	0
Sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2}$	∞	-1	∞
Csc	∞	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	1	∞	-1

A continuación aparece una tabla que facilita el aprendizaje y uso de los valores de las funciones trigonométricas para ángulos notables:

$$\begin{array}{ccccc} 0^o & 30^o & 45^o & 60^o & 90^o \\ 2\pi & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}}\left\{\begin{array}{l} sen\,\theta \\ \cos\theta \end{array}\right.}{2}$$

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow.

1. $\int_0^3 x^2dx$

$$\int_0^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \left[\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right] = 9\,u^2$$

2. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-2}^{-1}(x-1)^{-3}dx$

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x-1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2}-\frac{1}{(-3)^2}\right] = -\frac{5}{72}$$

3. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int_0^3(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx$

$$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

4. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{98}{3}$$

5. $\int_2^3\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$\int_2^3\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 2x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{8}-\sqrt{3}$$

6. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}-\operatorname{arc\,tg}1 = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

7. $\int_0^\pi cosxe^{senx}\,dx = \int_0^\pi e^{senx}cosx\,dx$

$$\int_0^\pi \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\,dx = \left[e^{\operatorname{sen} x}\right]_0^\pi = e^0-e^0 = 0$$

8. $\int_0^1 x10^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi 10^{x^2}\,2xdx$

$$\int_0^1 x10^{x^2}\,dx = \left.\frac{1}{2}\frac{10^{x^2}}{ln10}\right|_0^1 = \frac{1}{2ln10}\left(10^{1^2}-10^{0^2}\right) = \frac{9}{2ln10}\,u^2$$

9. $\int_0^{\pi} sen^2x\, dx$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right]_0^{\pi} = 0$$

10. $\int_0^{\pi} tg^2x\, dx$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int_0^{\pi}\left(\sec^2 x - 1\right) dx = \left[\operatorname{tg} x - x\right]_0^{\pi} = -\pi$$

11. $\int_2^3 \frac{dx}{xln^4x}$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x} = \int_2^3 \ln^{-4} x \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{1}{3\ln^3 x}\right]_2^3 = -\frac{1}{3\ln^3 3} + -\frac{1}{3\ln^3 2}$$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3x\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right) \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x\right) dx =$$

$$= \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

13. $\int_0^{\pi} x^2cosx\, dx$

$$\int x^2 \cos x\, dx$$

$$u = x^2 \xrightarrow{derivar} u' = 2x$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{integrar} v = \operatorname{sen} x$$

$$\int_0^{\pi} x^2cosx\, dx = x^2senx - 2\int xsenxdx$$

$$u = x \xrightarrow{derivar} u' = 1$$

$$v' = \operatorname{sen} x \xrightarrow{integrar} v = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi} x^2cosx\, dx = x^2senx - 2(-xcosx + \int cosxdx)$$

$$\int_0^{\pi} x^2cosx\, dx = x^2senx + 2xcosx - 2senx|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} x^2cosx\, dx = (\pi^2 sen\pi + 2\pi cos\pi - 2sen\pi) - 0$$

$$\int_0^{\pi} x^2cosx\, dx = (\pi^2(0) + 2\pi(-1) - 2(0)) = -2\pi\, u^2$$

14. $\int_1^2 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx$

$$\int_1^2 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx = \int_1^2 \left(x-2+\frac{2}{x+1}\right)dx = \int_1^2 x\,dx - 2\int_1^2 dx + 2\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln(x+1)\Big|_1^2 = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+1)^2\Big|_1^2$$

$$\int_1^2 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx = \left(\frac{2^2}{2} - 2(2) + ln3^2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 2(1) + ln2^2\right)$$

$$\int_1^2 \frac{x^2-x}{x+1}\,dx = \left[ln\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{1}{2}\right]u^2$$

BIBLIOGRAFÍA

- Budnicks, Frank. Matemáticas aplicadas. Editorial Mc Graw Hill. 1995
- Eslava, Maria E. Matemáticas Universitarias. Editorial Mc Graw Hill. 1990.
- Haeussler, Ernest y Paul, Richard S. Matemáticas para Administración y Economía. Editorial Iberoamérica. Quinta Edición. 2007
- Haussler, Ernest E y Paul S, Richard. Matemáticas para administración y economía. Grupo Editorial Iberoamérica. 1992
- Leithold, Louis. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Editorial Harla. 1998.
- Purcell – Valberg _Rigdon, Cálculo. Editorial Pearson. Octava Edición. 2001
- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Sexta Edición. 2012
- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. 2012
- Swokowski, Eael W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano. 2000.
- Swokowski, Eael W. Cálculo. Grupo editorial Iberoamericano. 2002
- Thomas, G., Finney R. Cálculo una variable. Novena edición. 2006

WEBGRAFIA

- www.matematicatuya.com
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001285/index.html
- http://148.216.10.84/DIFERENCIAL/INDEX.HTM
- http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351
- http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/
- http://calculo.tripod.com/

EJERCICIOS PROPUESTOS

Use el teorema fundamental del cálculo para evaluar cada integral definida:

1. $\int_1^{\sqrt[3]{a}} t^2\, dt$
2. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} u^{-\frac{1}{6}}\, du$
3. $\int_0^4 \sqrt{3\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{3}\right) d\alpha$
4. $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}} - 3v + 1\right) dv$
5. $\int_{-2}^{-1} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 dr$
6. $\int_{\log 2}^{\log 5} e^{3x}\, dx$
7. $\int_1^3 e^{-4x}\, dx$
8. $\int_{-1}^{1} 2^{3x-1}\, dx$
9. $\int_e^{3e} \frac{1}{x}\, dx$
10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt$
11. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} sen\psi \cos\psi\, d\psi$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx$
13. $\int_0^1 x 4^{x^2}\, dx$
14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+sen^2 x}\, dx$
15. $\int_1^2 \frac{p+1}{\sqrt{p^2+2p}}\, dp$
16. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\, dx$
17. $\int_0^4 \frac{1}{x^2+16}\, dx$
18. $\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}\right) dx$
19. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{6}{x^2+1}\, dx$
20. $\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
21. $\int_{-a}^{a} \sqrt{x^2+a^2}\, dx$
22. $\int_0^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx$
23. $\int_0^e \cos \ln t\, dt$
24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \cos 2\varepsilon\, d\varepsilon$
24. $\int_{-3}^{0} \left(1+\sqrt{9-x^2}\right) dx$
26. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos 2t\, dt$
27. $\int_0^1 \left(x^2-1\right) e^x\, dx$
28. $\int_0^{\frac{1}{2}} sen^{-1} x\, dx$
29. $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx$
30. $\int_1^2 x^3 \ln x\, dx$
31. $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$
33. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sen^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
34. $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$
35. $\int_1^4 \ln\sqrt{x}\, dx$
36. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
37. $\int_0^4 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$
38. $\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$
39. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^4 x\, dx$
40. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2}\, dx$
41. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$
42. $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{4-9x^2}\, dx$
43. $\int_0^1 \frac{\theta}{\theta^2+\theta+1}\, d\theta$
44. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$
45. $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x+2}\, dx$
46. $\int_3^7 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\, dx$
47. $\int_1^2 \frac{x^2+x-6}{x+2}\, dx$
48. $\int_2^4 \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}\, dx$
49. $\int_2^3 \frac{6x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x}\, dx$
50. $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\, dx$