GUÍA DE APRENDIZAJE DE CALCULO INTEGRAL

La *guía de aprendizaje* es una herramienta de planeación del proceso de enseñanza aprendizaje, que pretende orientar al estudiante en el desarrollo de las actividades de la asignatura. La *guía de aprendizaje* racionaliza el trabajo académico en el aula, porque en su diseño incluyen: los objetivos de la guía, los contenidos mínimos y comunes de la asignatura, conocimientos previos y las competencias que se desean desarrollar y reforzar.

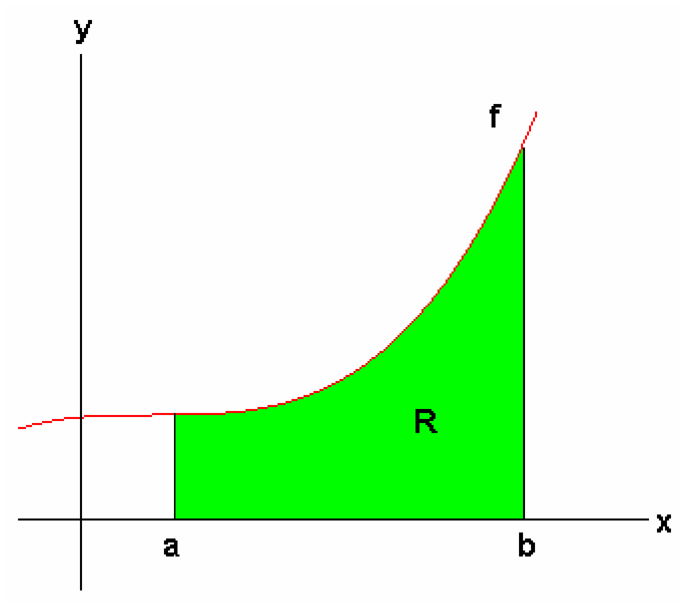
TEMA**:** **Aplicaciones de la integral definida: Área bajo la curva**

Criterios de evaluación:

1. Presentación de la guía de aprendizaje desarrollada
2. Habilidad en la solución de ejercicios propuestos
3. Manejo de conocimientos previos

CONCEPTO: Si f es continua y no negativa en un intervalo cerrado [a,b] el área de una región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales x=a y x=b viene dada por:

$$\text{Area} = \int_a^b f(x)dx$$

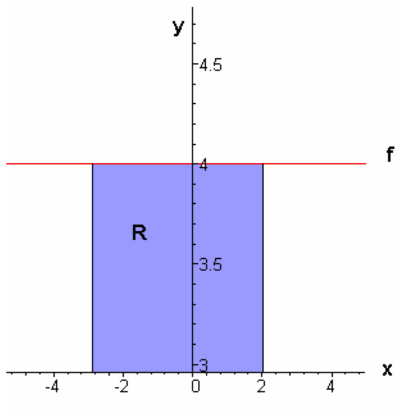


Se ve que f es una función continua, positiva (por encima del eje x), la región R está limitada con x=a y x=b, podemos hallar el área de la región R por medio de una integral definida.

EJEMPLO 1

Hallar el área de la región acotada por la curva f(x)=4 u las rectas x=-3 y x=2.

1. TRAZO DE LA REGIÓN: Se debe trazar la región pedida. En este ejemplo f es positiva y continua.



2. PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL: El área de la región R viene dada por:

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2} 4dx$$

3. EVALUACION DE LA INTEGRAL:

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2} 4dx$$

$$A = 4X \Big|_{-3}^{2}$$

$$A = 4(2)-4(-3) = 20u^2$$

Se puede observar que esta región es rectangular. Se puede utilizar:

A=b*h

(2-(-3))(4)

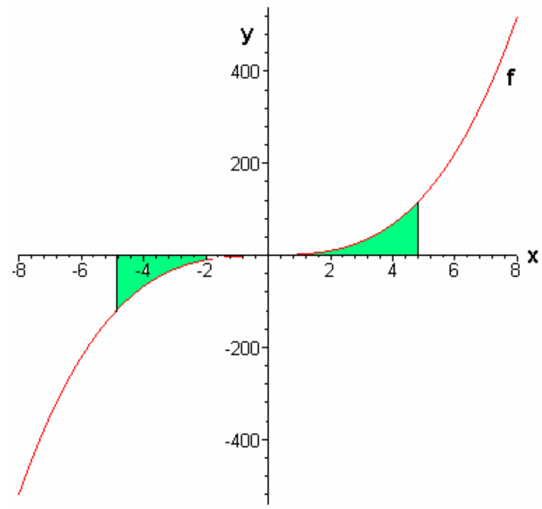
=5*4

$=20u^2$

EJEMPLO 2

Hallar el área de la región acotada por la curva $f(x) = x^3 + x$ acotada por [5,-5]

1. TRAZO DE LA REGIÓN



2. PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL: Las rectas x=-5 y x=5 dividen la región en dos partes. A_1 y A_2. El área de la región verde viene dada por: $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-5}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{5}(x^3 - x)dx$$

3. EVALUACIÓN INTEGRAL:

$$A = \int_{-5}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{5}(x^3 - x)dx = \left[\frac{X^4}{4} + \frac{X^2}{2}\right]\Bigg|_{-5}^{0} + \left[\frac{X^4}{4} + \frac{X^2}{2}\right]\Bigg|_{0}^{5}$$

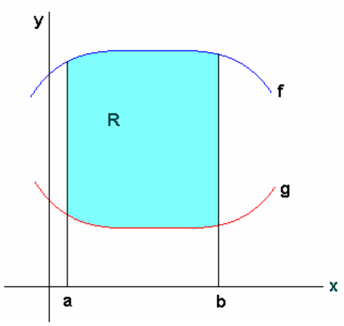
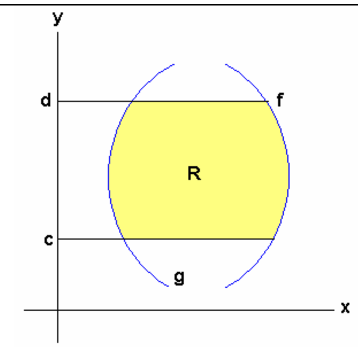
$$A = \left| -\frac{(-5^4)}{4} + \frac{(-5^2)}{2} \right| + \frac{5^4}{4} + \frac{5^2}{2}$$

$$A = \left| -\frac{675}{4} \right| + \frac{675}{4}$$

$A = \frac{675}{2}\, u^2$ es el área de la región sombrada

ÁREAS ENTRE DOS CURVAS QUE NO SE CORTAN

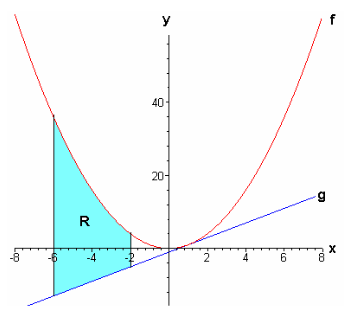
CONCEPTO: Se consideran dos funciones: f(x) y g(x) en el intervalo [a,b] solo si f(x) es mayor que g(x).

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>El área de la región R viene dada por:
A = $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$
Tanto los limites de integración como las variables dependen de x</td>
<td>El área de la región R viene dada por:
A = $\int_c^d (f(y) - g(y))dy$
Tanto los limites de integración como las variables dependen de y</td>
</tr>
</table>

EJEMPLO 3

Determinar el área de la región por: $f(x) = x^2\, ; g(x) = 2x - 1; x = 6\; y\; x = -2$

1. TRAZO DE LA REGIÓN



2. PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL:

$$A = \int_{-6}^{-2} (x^2 - (2x - 1))dx = \int_{-6}^{-2} (x^2 - 2x + 1))dx$$

3. EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL: $\mathrm{A} = \left[\frac{\mathrm{x}^3}{3} - \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}\right] \begin{matrix} -2 \\ -6 \end{matrix}$

$$A = \left[\frac{(-2^3)}{3} - (-2^2) + (-2)\right] - \left[\frac{(-6^3)}{3} + (-6^2) - (-6)\right]$$

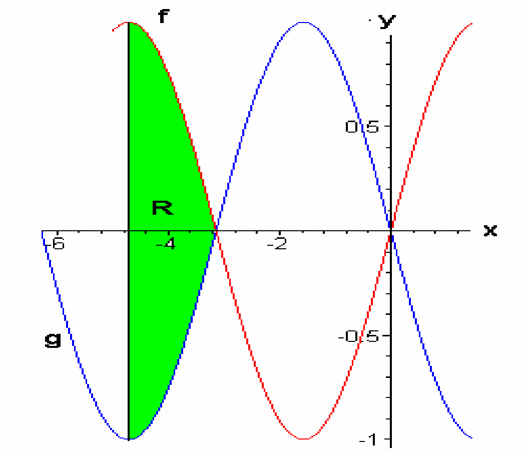
$$A = -\frac{8}{3} - 4 - 2 \;+\; \frac{196}{3} + 36 + 6$$

$$A = \frac{296}{3} u^2 \text{ es el área de R}$$

EJEMPLO 4

Determinar el área de la región acotada por: f(x)=$\sin x$ g(x)=$-\sin x$ y las rectas x= $\frac{3\pi}{2}$ y x=-2π

1. TRAZO DE LA REGIÓN



2. PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL:

$$A = \int_{-2\pi}^{-3\pi/2} (sen(x) - (-sen(x))dx = \int_{-2\pi}^{-3\pi/2} 2sen(x)dx$$

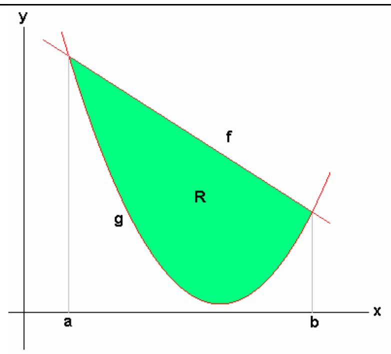
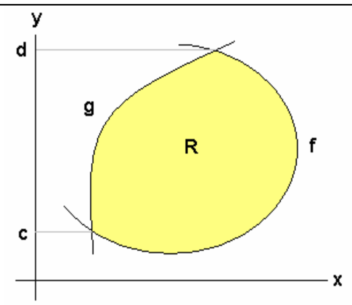
3. EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL:

$$= -2\cos x \Big|_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{2}}$$

A = $2u^2$ es el área de R

ÁREAS DE REGIONES GENERADAS POR DOS CURVAS QUE SE CORTAN

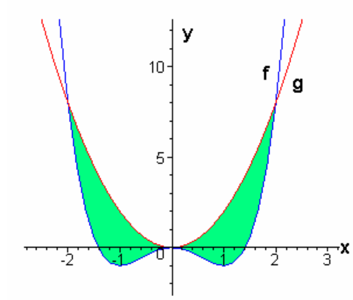
CONCEPTO: Para estas regiones no se es dado los limites de integración que serian los puntos de corte entre dos graficas. Para encontrarlos basta hallar los x y los y para los cuales f=g.

	
El área de la región R viene dada por: $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ f y g son positivas y continuas en un intervalo cerrado [a,b] con f(x)>g(x)	El área de la región R viene dada por: $A = \int_c^d (f(y) - g(y))dy$ y g son positivas y continuas en un intervalo cerrado [c,d] con f(y)>g(y)

EJEMPLO 5

Determinar el área de la región por: f(x)=$2x^2$; $g(x) = x^4 - 2x^2$

1. TRAZO DE LA REGIÓN



Tenemos que encontrar los límites de integración, pero en la gráfica podemos decir que esos límites lo determinan los puntos de intersección de f y g. Como dijimos anteriormente, estos se hallan de la siguiente forma:

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$
$$x^2(x - 2)(x + 2) = 0$$
$$x = 0$$
$$x = 2$$
$$x = -2$$

2. PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL:

Luego, x=0,2,-2 son los puntos de ambas funciones. Después de esto podemos establecer la integral que nos permitirá hallar el área de la región pedida:

$$A = \int_{-2}^{0}\left(2x^2(x^4-2x^2)\right)dx + \int_{0}^{2}\left(2x^2(x^4-2x^2)\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(-x^4+4x^2)dx + \int_{0}^{2}(-x^4+4x^2)dx$$

3. EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL:

$$\left[\frac{4X^3}{3}+\frac{X^5}{5}\right]\Bigg|_{-2}^{0} + \left[\frac{4X^3}{3}+\frac{X^5}{5}\right]\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= -\frac{4(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^5}{5}+\frac{4(2)^3}{3}-\frac{-2^5}{5}$$

$$= \frac{8(2)^3}{3}-\frac{2(2)^5}{5}$$

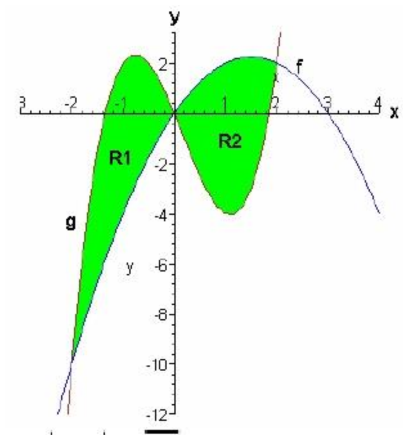
$$= \frac{64}{3}-\frac{64}{5}=\frac{128}{15}$$

El área de la región es $A = \frac{128}{15}\ u^2$

EJEMPLO 6

Determinar el área de la región por: f(x)=$-x^2+3x$; $\mathrm{g(x)} = 2x^3 - x^2 - 5x$

1. TRAZO DE LA REGIÓN



Si observamos la figura anterior, la región completa se divide en dos regiones, R1 y R2, determinadas por los puntos de corte de ambas funciones. De estos puntos de corte se puede obtener el área total de la siguiente forma:

$$2x^3 - x^2 - 5x = -x^2 + 3x$$
$$2x^3 - 8x = 0$$
$$2x(x^2 - 4) = 0$$
$$2x(x^2 - 4) = 0$$

2. PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL:

Luego, x=0,-2,2 son los puntos de ambas funciones. Después de esto podemos establecer la integral que nos permitirá hallar el área de la región pedida:

$$A = \int_{-2}^{0}(2x^3 - x^2 - 5x - (-x^2 + 3x))dx + \int_{0}^{2}\left(-x^2 + 3x - (2x^3 - x^2 - 5x)\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{0}(2x^3 - 8x)dx + \int_{0}^{2}(8x^4 - 2x^3)dx$$

3. EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL:

$$\left[\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]\Bigg|_{-2}^{0} + \left[4x^2 + \frac{x^4}{2}\right]\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= 4(-2)^2 - \frac{(-2)^4}{2} + 4(2)^2 - \frac{(-2)^4}{2}$$

$$= 32 - 16 = 16$$

El área de la región es $A = 16\ u^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular el área bajo la curva f(x)=x^2, limitada por x=0 y x=2.
2. Calcular el área bajo la curva f(x)=$x^3 - 2x + 6$, limitada por x=-1 y x=2.
3. Calcular el área bajo la curva f(x)=$-x^2 + 2x$ limitada por x=-1 y x=4.
4. Calcular el área bajo la curva $f(x) = x^3 - 2x + 4 \text{ y } g(x) = x^2$entre a=-1 y b=1.5.
5. Hallar el área formada por $\int_4^{10} \frac{1}{2} x \, dx$
6. Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 + 2$, el eje x y las rectas$x = 1, x = 3$
7. Calcular el área correspondiente entre la parábola $y = -x^2 + 9$, el eje x. La curva corta el eje x en los puntos -3 y 3.
8. Calcular el área correspondiente entre la curva $y = x^2 + 1$, el eje x, y las rectas x=2 y x=-2.
9. Calcular el área comprendida entre el arco de curva $\cos x$ entre x=0 y x=$\frac{\pi}{2}$ y el eje x.
10. Calcular el área comprendida entre la curva $\sin x$, el eje x entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Ejdefinida.htm

BIBLIOGRAFIA

Leithold, L (1973).El Cálculo con Geometría Analítica. México. Ediciones Harla, S. A de C. V. Segunda edición.

Larson, R., Hostetler, R. (1989). Cálculo y Geometría Analítica. Madrid. Editorial McGraw-Hill. Tercera edición.

Swokowski, E. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. México. Editorial Iberoaméricana, S. A de C. V. Segunda edición.

Kitchen, J. (1987). Cálculo. México. Editorial McGraw-Hill

Taylor, H., Wade, T. (1977). Cálculo Diferencial e Integral. México. Editorial Limusa.

Thomas, G., Finney, R. (1987). Cálculo con Geometría Analítica. Estados Unidos. Editorial Addison – Wesley Iberoamericana, S. A. Sexta edición.

Apostol, T. (1985). Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades. Barcelona. Editorial Reverté, S. A Segunda edición.

Stein, S., Barcellos, A. (1994). Cálculo y Geometría Analítica. Colombia. Editorial McGraw-Hill. Quinta edición.

s.wikipedia.org/wiki/Integración

*www.aulafacil.com/matemáticas-**integrales**/.../Temario.htm* -

www.vitutor.com/**calculo**.html - España

http://matematica.wikia.com/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo_integral

http://math2.org/math/integrals/es-tableof.htm

http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Ejdefinida.htm