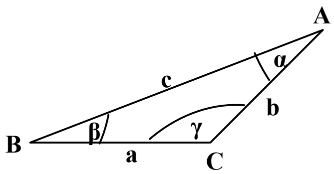
LEY DE SENOS

Ya hemos visto como resolver triángulos rectángulos ahora veremos todas las técnicas para resolver triángulos generales.



Este es un triángulo ABC el ángulo α se escribe en el vértice de A, el ángulo β se escribe en el vértice de B y el ángulo γ se escribe en el vértice de C.
Los lados que están opuestos al los vértices ABC y los escribimos con una letra minúscula abc.

Este tipo de triángulos los podemos resolver utilizando la ley de senos o la ley de cosenos.

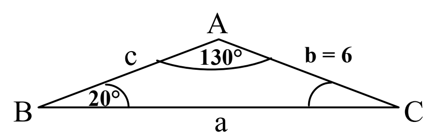
La fórmula para la ley de senos es:

$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$ **no hay diferencia si la tomas así:** $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ **pero no las puedes mezclar.**

El primer caso es de dos ángulos y un lado.
Determina las partes restantes del triángulo si $\beta=20°$, $\alpha=130°$ y b = 6.

Procedimiento: **ordena los datos del problema como se te indica a continuación.**

$\alpha=130°$ a = **13.44**
$\beta=20°$ b = 6
$\gamma=$ **30°** c = **8.77**



1) **La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo = 180°**

$\gamma=180-(130+20)=30°$ escribe la respuesta en nuestro cuadro.

2) Observamos que tenemos los valores de β y b por lo que las colocamos en nuestra fórmula y buscamos el lado a.

$$\frac{\sin 130}{a}=\frac{\sin 20}{6}$$ **despejamos a**

$$\frac{\sin 130 * 6}{\sin 20}=a$$

$$\approx 13.44=a$$ **colocamos nuestra respuesta en el cuadro**

3) Tomamos de nuevo los datos que tenemos seguros del problema que son β y b, porque pude haberme equivocado en la respuesta anterior y tener esta mala también.

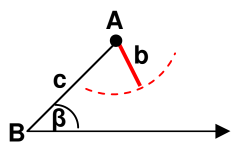
$$\frac{\sin 30}{c}=\frac{\sin 20}{6}$$

$$\frac{\sin 30 * 6}{\sin 20}=c \qquad \approx 8.77=c$$

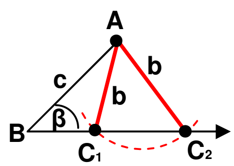
Segundo caso: dos lados y un ángulo opuesto alguno de los lados.

En este caso pueden derivarse cuatro casos diferentes:

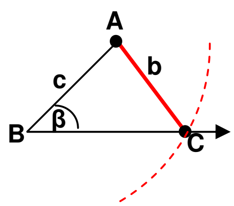
Supongamos que los lados c, b y el ángulo β se nos especifican, dibujamos el ángulo β y el lado c para localizar los vértices A y B, luego tomamos la medida de b con un compás lo cual corresponde al radio y lo trazamos desde el vértice A formando un arco. Aquí pueden surgir cuatro posibilidades:



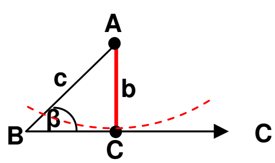
NO EXISTE TRIANGULO



SE FORMAN 2 TRIANGULOS



SE FORMA UN SOLO TRIANGULO



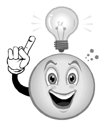
SE FORMA UN TRIANGULO RECTANGULO

Ejemplo: encuentra las partes restantes del triángulo

$$\begin{array}{lll} \alpha = & & a = \\ \beta = & 50^\circ & b = 5 \\ \gamma = & & c = 6 \end{array}$$

Primero: tomo β con b y c para hallar γ

$$\frac{\sin 50}{5} = \frac{\sin \gamma}{6} \qquad \frac{\sin 50 * 6}{5} = \sin \gamma \qquad \approx 0.9193 = \sin \gamma$$



En este momento razono si existe triángulo o no

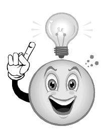
"el seno existe si se encuentra entre 1 y -1"
1) mi resultado 0.9193 ¿es mayor que 1? no.

2) mi resultado 0.9193 ¿es menor que -1? no.

Entonces EXISTE TRIANGULO.

Si el resultado fuera mayor ó menor que 1 ó -1 entonces NO EXISTE TRIANGULO y solamente escribo no existe triángulo.

$$\approx 0.9193 = \sin \gamma \qquad \sin^{-1} 0.9193 = \gamma \qquad 66.82° = \gamma$$



En este momento razono si hay 1 ó 2 triángulos

1) Tomo el resultado del ángulo que me dio 66.82° y lo resto de 180°.

   180° - 66.82° = 113.18°

2) Tomo los datos iniciales y los copio como posible segundo triángulo

Primer triángulo		**Posible segundo triángulo**	
$\alpha =$	a =	$\alpha =$	a =
$\beta = 50°$	b = 5	$\beta =$ 50°	b = 5
$\gamma =$	c = 6	$\gamma =$	c = 6

1) El primer resultado **66.82°** lo escribo en el cuadro de datos del inicio del problema.

Primer triángulo		**Posible segundo triángulo**	
$\alpha =$	a =	$\alpha =$	a =
$\beta = 50°$	b = 5	$\beta =$ 50°	b = 5
$\gamma =$ **66.82°**	c = 6	$\gamma =$	c = 6

2) Copio de nuevo el cuadro inicial de datos y escribo el segundo resultado **113.18°.**

Primer triángulo		**Posible segundo triángulo**	
$\alpha =$	a =	$\alpha =$	a =
$\beta = 50°$	b = 5	$\beta =$ 50°	b = 5
$\gamma =$ **66.82°**	c = 6	$\gamma =$ **113.18°**	c = 6

3) Recuerda que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°.

Ahora encontramos el valor de α en el primer triángulo

$180-(50+66.82)=63.18$ coloca el resultado en el cuadro del primer triángulo.

Ahora encontramos el valor de α en el posible segundo triángulo

$180-(50+113.18)=16.82$ como el resultado es positivo y la sumatoria no no es mayor de 180° **entonces HAY DOS TRIANGULOS**

Primer triángulo		**Segundo triángulo**	
$\alpha =$ **63.18**	a =	$\alpha =$ **16.82**	a =
$\beta = 50°$	b = 5	$\beta =$ 50°	b = 5
$\gamma =$ **66.82°**	c = 6	$\gamma =$ **113.18**	c = 6

Por último resuelvo el lado a para el primero y segundo triángulo y con esto habrás finalizado.

$$\frac{\sin 63.18}{a_1}=\frac{\sin 50}{5}$$

$$\frac{\sin 63.18*5}{\sin 50}=a_1$$

$$\approx 5.83=a_1$$

$$\frac{\sin 16.82}{a_2}=\frac{\sin 50}{5}$$

$$\frac{\sin 16.82*5}{\sin 50}=a_2$$

$$\approx 1.89=a_2$$

LEY DEL COSENO:

La ley de los Coseno es un término que permite conocer cualquier lado de un triángulo, pero para resolverlo pide que conozcas los otros dos lados y el ángulo opuesto al lado que quieres conocer. La ley de los Cosenos ayuda a resolver ciertos tipos de problemas de triángulos, como los triángulos oblicuángulos, los cuales carecen de un ángulo de 90°.

La ley del Coseno dice así:

"*En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos, por el coseno del ángulo que forman"*

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC\cos(a)}$$

Pero si tienes los lados, y quieres saber el ángulo que hacen los lados B y C, entonces realizaras la siguiente formula:

A, B y C son los lados del triángulo, y a, b y c son los ángulos del triángulo:

Las letras minúsculas y mayúsculas del mismo tipo no se encuentran juntas, es decir, la a está en el ángulo opuesto de A, la b está en el ángulo opuesto de B y la c está en el ángulo opuesto de C. Esto siempre debe ser así cuando resuelvas un triángulo. Si no lo haces así, el resultado seguramente te saldrá erróneo.

Observa que la ley del coseno sólo será cuando tienes los dos lados y el ángulo que hacen los lados, porque si no te dan el ángulo que hacen los lados, tendrás que usar la ley de senos.

Arriba se muestran las características que tiene que tener el triángulo para resolverlo por la ley de cosenos, es decir, los tres datos necesarios.

Recuerda que para sacar el ángulo interno la suma de los tres ángulos internos dará 180° y te quedara la formulita de la manera siguiente:

c = 180° - a - b

Ejemplos de resolución de triángulos oblicuángulos.

Primer caso: Conocidos los tres lados.

Ejemplo. Resolver el triángulo cuyos datos son:

$a = 34$, $b = 40$, $c = 28$.

Se aplica la ley de coseno.

Cálculo de A. $a2 = b2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Despejando *cos* A*: cos* A = $\underline{b^2 + c^2 - a^2}$

2bc

Cos A = $40^2 + 28^2 - 40^2 = 1600 + 784 - 1156 = 307 = 0.54821$.

2 x 40 x 28 2240 560

.

. . **A = 56° 45'**.

Cálculo de B.

Análogamente: $\underline{a^2 + c^2 - b^2}$

cos B = 2ac

.

. . *Cos* B = $34^2 + 28^2\ 40^2 = 1156 + 784\ 1600 = 340 = 0.17857$.

(2) (34) (28) 1904 1904

.

. . B = 79° 43'.

Cálculo de C.

Análogamente:

Cos C = $\underline{a^2 + b^2 - c^2}$.

2ab ´

Cos C = <u>34² + 40² 28²</u> = <u>1156 + 1600 784</u> = <u>1972 </u>= 0.72500

(2) (34) (40) 2720 2720

.

. . C = 43° 32´

Es decir:

A = 56° 45"

B = 79° 43'

C = 43° 32'

A + B + C = 178° 120' = 180°.

Segundo caso. Se resolverá un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido. Resolver el triangulo cuyos datos son:

A = 68° 18'; b = 6; c = 10.

Datos Fórmulas

A = 68° 18', a = "b² + c² 2bc *cos* A.

b = 6, *cos* B = <u>a² + c² - b²</u>

2ac ´

c = 10, *cos* C = <u>a² + b² - c²</u>

2ab

Cálculo de a.

a = "b² + c² 2bc *cos* A = "6² + 10² (2) (6) (10) (cos 68° 18',)

a = "36 + 100 - (120) (0.36975) = "136 - 44.37 = "91.63

a = 9.57

Cálculo de B.

Cos B = $a^2 + c^2\ b^2 = 9.57^2 + 10^2\ 6^2$ = 91.63 + 100 36.

2ac 2 x 9.57 x 10 191.4 '

Cos B = <u>191.63 - 36</u> = <u>155.63</u> = 0.81311.

- 191.4

.

. . **B = 35° 36.**

Cálculo de C.

Cos C = $\underline{a^2 + b^2 - c^2}$ = $\underline{9.57 + 6^2 - 10^2}$ = <u>91.63 + 36 - 100</u> .

2ab (2) (9.57) (6) (12) (9. 57) `

Cos C = <u>127.63 - 100</u> = <u>27.63</u> = 0.24059.

- 114.84

.

. . **C = 76° 6.**

Ejemplo no. 3

a = 41

b = 19.5

c = 32.48

Cálculo de A

CosA = <u>b2 + c2 - a2</u>

2a

CosA = <u>(19.52) +(32.482) - (412)</u> = <u>380.25 + 1054.9504 - 1681</u>

2(19.5) (32.48) 1266.72

CosA = -0.194044145 A = Cos-1 -0.194044145 **A = 101. 188°**

Cálculo de B

CosB = a2 + c2 - b2

2ac

CosB = (412) + (32.482) - (19.52) = 1681 + 1054.9504 - 380.25

2(19.5) (32.48) 2663.36

CosB = 2355.7004 = 0.88448 B = Cos-1 0.88448 **B = 27.8118°**

2663.36

Cálculo de C

Cos C = a2 + c2 - b2

2ac

Cos C = (412) + (19.52) - (32.482)

2(41) (19.5)

Cos C = 1681+380.25 - 1054.9504 = 1006.2996 = 0.62933

1599 1599

Cos-10.62933 **C = 50.9992°**

Ley de las tangentes:

Teorema según el cual en todo triángulo la tangente de uno de sus ángulos es igual a su seno dividido por su coseno:

tg┼ =sen┼ /cos┼ .