	<p>FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA AREA: INGENIERIA</p>	<p>CURSO: CÁLCULO DIFERENCIAL</p> <p>GUIA PROCEDIMENTAL No. 4</p>	<p>FECHA: 2012-30-01</p> <p>VERSION:2</p> <p>Página 1 de 6</p>
---	---	---	--

TEMA: Funciones Racionales

TIEMPO ESTIMADO: 4 horas

OBJETIVOS:

- Reconocer funciones racionales.
- Identificar numérica y gráficamente los diferentes tipos de asíntotas que caracterizan una función racional.
- Representar gráficamente funciones racionales.

CONDUCTA DE ENTRADA:

Expresar el polinomio como un producto de funciones:

1. $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ Factorizar utilizando trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.
2. $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$ Se factoriza y se utiliza diferencia de cuadrados perfectos.
3. $x^3 - 9x = x(x + 3)(x - 3)$ Se aplica factor común y luego diferencia de cuadrados perfectos.


Expresar como un cociente:

4. $\frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 2x - 2 + \frac{1}{x - 1}$ Se utiliza la división sintética ya que el divisor es de la forma $x \pm c$.
5. $\frac{4x^3 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 4x + \frac{2x - 5}{x^2 - 1}$ Se utiliza división entre polinomios, ya que el divisor es distinto a $x \pm c$

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Una función de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0}{b_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + b_0}$

se denomina racional. En estas funciones es posible que existan asíntotas (tendencias al infinito) horizontales, verticales y oblicuas.

	<p>FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA AREA: INGENIERIA</p>	<p>CURSO: CÁLCULO DIFERENCIAL</p> <p>GUIA PROCEDIMENTAL No. 4</p>	<p>FECHA: 2012-30-01</p> <p>VERSION:2</p> <p>Página 2 de 6</p>
---	---	---	--

Es importante identificar el grado del polinomio tanto del numerador como del denominador. En este caso el polinomio $p(x)$ es de grado n y el polinomio $q(x)$ es de grado k .

a. Asíntotas horizontales:

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal, de la gráfica de la función f si

$$f(x) \rightarrow b \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{o cuando} \quad x \rightarrow -\infty$$

(i) Si $n < k$, entonces el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de f

(ii) Si $n = k$, entonces la recta $y = \frac{a_n}{b_k}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f

(iii) Si $n > k$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal.

b. Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{o bien} \quad f(x) \rightarrow -\infty$$

Cuando x tiende a a , por la derecha o por la izquierda.

Se determinan cuando el denominador se hace cero, es decir, $q(x) = 0$. Para ello igualamos el polinomio del denominador a cero, factorizamos si es posible e igualamos cada factor a cero.

c. Asíntotas oblicuas


La recta $y = mx + b$, es una asíntota oblicua de $f(x)$, si y sólo si el grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el grado del denominador en uno, es decir se cumple por la parte (iii) Si $n > k$, del teorema de las asíntotas horizontales. La asíntota oblicua es el cociente de dividir el numerador entre el denominador de $f(x)$.

Ejemplo: Sea $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$ determinar:

a. Las asíntotas, si existen:

Para encontrar las posibles asíntotas de la función dada, entonces:

Elaboró: Marysol Rodríguez Blanco.	Revisó: Coordinador Área	Aprobó: Consejo de facultad
------------------------------------	--------------------------	-----------------------------

	FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA AREA: INGENIERIA	CURSO: CÁLCULO DIFERENCIAL GUIA PROCEDIMENTAL No. 4	FECHA: 2012-30-01 VERSION:2 Página 3 de 6
---	---	--	--

i) Asíntotas verticales: como el denominador es una expresión que contiene variable entonces,

$$9 - x^2 = 0 \quad \text{igualar a cero}$$

$$(3 + x)(3 - x) = 0 \quad \text{factorizar}$$

$$3 + x = 0 \quad \wedge, \quad 3 - x = 0 \quad \text{cada factor igual a cero}$$

$$x = -3 \quad \wedge, \quad x = 3 \quad \text{se despeja}$$


$$x = \{-3, 3\} \quad \text{son los valores de las asíntotas verticales}$$

ii) Asíntotas horizontales: el grado del polinomio del numerador y denominador es 2, lo que implica que \exists una asíntota horizontal en $y = \frac{a_n}{b_m}$

iii) Asíntotas oblicuas: No existe asíntota oblicua ya que \exists asíntota horizontal.

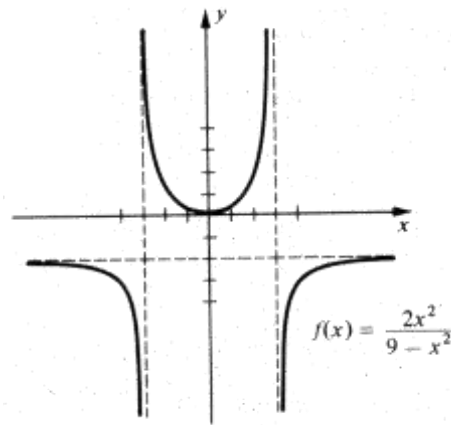
b. Tabla de datos: se evalúa la función dada para valores que contengan datos fuera y dentro de las asíntotas verticales encontradas.

x	$y = f(x)$
-7	-2.45
-6	-2.66
-5	-3.12
-4	-4.57
-3	∞
-2	1.6
-1	0.25
0	0
1	0.25

	<p>FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA AREA: INGENIERIA</p>	<p>CURSO: CÁLCULO DIFERENCIAL</p> <p>GUIA PROCEDIMENTAL No. 4</p>	<p>FECHA: 2012-30-01</p> <p>VERSION:2</p> <p>Página 4 de 6</p>
---	---	---	--


x	$y = f(x)$
2	1.6
3	∞
4	-4.57
5	-3.12
6	-2.66
7	-2.45

c. Gráfica



d. Dominio $D_{f(x)}$ y rango $R_{f(x)}$ de la función:

El $D_{f(x)}$ de la función son todos los valores de x que se relacionan, es decir todos los números reales excepto las asíntotas verticales, de tal manera que: $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ y el rango está determinado por los elementos de y que son imagen de los elementos de x , en este caso está determinado por: $R_f = \mathbb{R} - [-2, 0)$.

	FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA AREA: INGENIERIA	CURSO: CÁLCULO DIFERENCIAL GUIA PROCEDIMENTAL No. 4	FECHA: 2012-30-01 VERSION:2 Página 5 de 6
---	---	--	--

EJERCICIOS PROPUESTOS


En cada una de las funciones dadas determinar:

- a) Asíntotas, si existen
- b) tabla de datos
- c) graficar
- d) El dominio y rango de la función.

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	9. $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$
2. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$	10. $f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}$
3. $f(x) = \frac{4x + 7}{6x^2 + 13x - 5}$	11. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^3}$
4. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$	12. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}$
5. $f(x) = \frac{5x}{4 - x^2}$	13. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$
6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 7x + 10}$	14. $f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$
7. $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 16}$	15. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$
8. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$	16. $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

APLICACIONES:

En la formulación de algunas leyes físicas como las leyes de Coulomb, de gravitación universal, las ecuaciones de campo y potencial eléctrico, entre otras. También para determinar el costo de un trabajo dependiendo unas condiciones dadas.

	<p>FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA AREA: INGENIERIA</p>	<p>CURSO: CÁLCULO DIFERENCIAL</p> <p>GUIA PROCEDIMENTAL No. 4</p>	<p>FECHA: 2012-30-01</p> <p>VERSION:2</p> <p>Página 6 de 6</p>
---	---	---	--

El costo C de limpiar un x por ciento de un derramamiento de petróleo en la costa, aumenta mucho cuando x se aproxima a 100. Suponga que $C(x) = \frac{20x}{101-x}$ (en miles de dólares).

- Compare $C(100)$ con $C(99)$
- Trace la gráfica de C para $0 < x < 100$

BIBLIOGRAFÍA

- Budnicks, Frank. Matemáticas aplicadas. Editorial Mc Graw Hill. 1995
- Eslava, Maria E. Matemáticas Universitarias. Editorial Mc Graw Hill. 1990.
- Haeussler, Ernest y Paul, Richard S. Matemáticas para Administración y Economía. Editorial Iberoamérica. Quinta Edición. 2007
- Haussler, Ernest E y Paul S, Richard. Matemáticas para administración y economía. Grupo Editorial Iberoamérica. 1992
- Leithold, Louis. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Editorial Harla. 1998.
- Purcell – Valberg _Rigdon, Cálculo. Editorial Pearson. Octava Edición. 2001
- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Sexta Edición. 2012
- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. 2012
- Swokowski, Eael W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano. 2000.
- Swokowski, Eael W. Cálculo. Grupo editorial Iberoamericano. 2002
- Thomas, G., Finney R. Cálculo una variable. Novena edición. 2006

WEBGRAFIA

- www.matematicatuya.com
- <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001285/index.html>
- <http://148.216.10.84/DIFERENCIAL/INDEX.HTM>
- <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351>
- <http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/>
- <http://calculo.tripod.com/>