TEMA: Funciones a trozos

TIEMPO ESTIMADO: 4 horas

OBJETIVOS:

- Reconocer funciones a trozos, segmentadas o por tramos.
- Identificar intervalos correspondientes a cada trozo, segmento o tramo de la función.
- Graficar funciones a trozos.
- Determinar el dominio $D_{f(x)}$ y rango $R_{f(x)}$ de funciones definidas a trozos.

CONDUCTA DE ENTRADA:

Recordemos que una función definida como:

$y = a,$ donde $a \in \Re,$ es una función constante.

$y = mx + b,$ es una función lineal, donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen o intercepto en el eje y.

$y = x^2 + bx + c$, es una función cuadrática.

$y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, es una función racional.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: Una función definida como

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in [a, b) \\ h(x) & si \quad x \in [b, c) \\ i(x) & si \quad x \in [c, d] \end{cases},$$

es una función a trozos, tramos o segmentada. De tal manera, que para cada intervalo la función es diferente, es decir, puede ser constante, idéntica, cuadrática, cúbica, racional o cualquier función definida en los $\Re$.

Para graficar una función a trozos es importante tabular para cada intervalo de la función y luego ubicar los respectivos datos en un único plano cartesiano, lo que nos permitirá observar y analizar el comportamiento de la misma.

Ejemplo: Sea

$f(x)=\begin{cases} -2, \; si \quad x<-1 \\ x^2, \; si \; -1\leq x<2 \\ x, \; si \; x\geq 2 \end{cases}$, graficar y determinar el dominio $D_{f(x)}$ y rango $R_{f(x)}$ de la función.

Observemos que para algunos intervalos establecidos, la función asume condiciones diferentes. Una función de este tipo está formada por varias funciones y cada una de ellas se cumple para determinado intervalo del dominio de la función.

a) Para elaborar la gráfica de la función dada, es necesario tabular previamente teniendo en cuenta cada uno de los intervalos dados y la función que se define en él, así:

$y=f(x)=-2$

x	y
-4	-2
-3	-2
-2	-2
-1	-2

$y=f(x)=x^2$

x	y
-1	1
0	0
1	1
2	4

$y=f(x)=x$

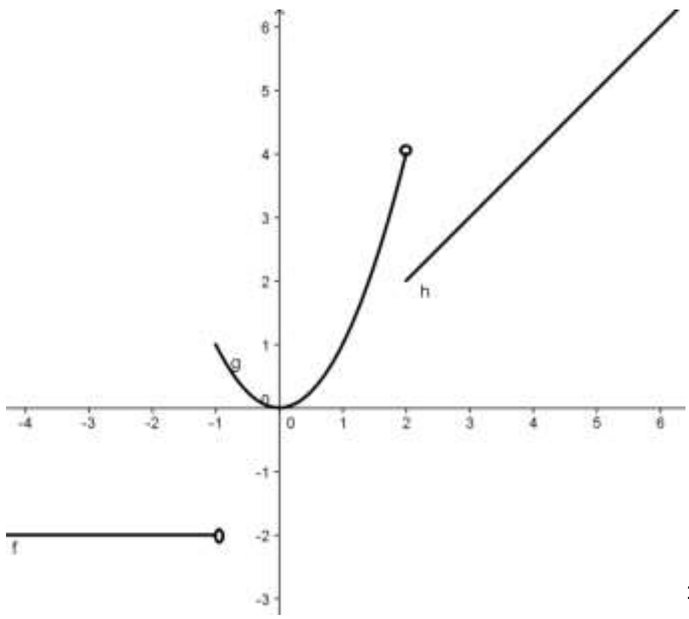
x	y
2	2
3	3
4	4
5	5

$i)$ En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función tiene un valor fijo de -2, es decir en este intervalo tenemos una función constante, por lo tanto su gráfica es la semirrecta que se traza desde - ∞ hasta -1, paralela al eje x. Debemos tener en cuenta que el extremo final no se incluye dado que el intervalo es abierto. Este detalle lo representamos en la gráfica con un pequeño círculo “hueco” en el punto $(-1,-2)$ de la gráfica de la función.

$ii)$ En el intervalo $(-1\;,\;2\,]$, la función es de segundo grado. Su gráfica es el arco de parábola desde el punto -1 incluido hasta el punto 2 sin incluir.

$iii)$ Finalmente, en el intervalo la función es idéntica y su gráfica es la semirrecta trazada desde 2 incluido hasta ∞ .

b) Gráfica:



[1]

c) Dominio $D_{f(x)}$ y rango $R_{f(x)}$ de la función:

El $D_{f(x)}$ de la función son todos los valores de x que se relacionan, es decir todos los números reales excepto aquellos que no son pareja de un valor en y, de tal manera que: $D_f = \Re$, en este caso se puede observar que los valores que generan riesgo son -1 quien no se relaciona con -2 pero sí con 1, y 2 quien no se relaciona con 4 pero sí con 2. De esta misma forma analizamos el rango de la función y está determinado por los elementos de y que son imagen de los elementos de x , en este caso está determinado por: $R_f = -2 \cup [0, \infty)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

En cada una de las funciones dadas

---

[1] Figura realizada en Geogebra 4.0

a) Tabular para cada uno de los intervalos dados
b) Graficar
c) Determinar el dominio y rango de la función.

1	$f(x)=\begin{cases}3, & si \quad x<0\\ -2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$	7	$f(x)=\begin{cases}-1, & si \quad x\in Z\\ 1 & si \quad x\notin Z\end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases}3, & si \quad x<-3\\ -x & si \quad -3\leq x\leq 3\\ -3 & si \quad x>3\end{cases}$	8	$f(x)=\begin{cases}x, & si \quad x<0\\ -2, & si \quad 0\leq x<1\\ x^2, & si \quad x\geq 1\end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & si \quad x\leq 2\\ 6, & si \quad 2<x<5\\ 2x-3, & si \quad x\geq 5\end{cases}$	9	$f(x)=\begin{cases}-2, & si \quad x\leq 0\\ x-2, & si \quad 0<x<2\\ x^2-2, & si \quad x\geq 2\end{cases}$
4	$f(x)=\begin{cases}-x, & si \quad x<0\\ 2, & si \quad 0\leq x<1\\ x^2, & si \quad x\geq 1\end{cases}$	10	$g(x)=\begin{cases}x, & si \quad x\leq 1\\ -x^2, & si \quad 1<x<2\\ x, & si \quad x\geq 2\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases}x^2, & si \quad x\leq -2\\ x^3, & si \quad \lvert x\rvert<2\\ 2x, & si \quad x\geq 2\end{cases}$	11	$f(x)=\begin{cases}x, & si \quad x\leq -1\\ -x^2, & si \quad -1\leq x<2\\ x, & si \quad x\geq 2\end{cases}$
6	$f(x)=\begin{cases}2x+1, & si \quad x\leq -3\\ -5, & si \quad -3<x\leq 0\\ x^2-5, & si \quad 0\leq x\leq 3\\ 4-x, & si \quad x>3\end{cases}$	12	$f(x)=\begin{cases}4-x, & si \quad x<-2\\ x^2+2, & si \quad -2\leq x<2\\ 6, & si \quad x\geq 2\end{cases}$

BIBLIOGRAFÍA

- Budnicks, Frank. Matemáticas aplicadas. Editorial Mc Graw Hill. 1995
- Eslava, Maria E. Matemáticas Universitarias. Editorial Mc Graw Hill. 1990.
- Haeussler, Ernest y Paul, Richard S. Matemáticas para Administración y Economía. Editorial Iberoamérica. Quinta Edición. 2007
- Haussler, Ernest E y Paul S, Richard. Matemáticas para administración y economía. Grupo Editorial Iberoamérica. 1992
- Leithold, Louis. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Editorial Harla. 1998.
- Purcell – Valberg _Rigdon, Cálculo. Editorial Pearson. Octava Edición. 2001
- Stewart, James. Cálculo Conceptos y contextos. Editorial Thomson. Sexta Edición. 2012
- Stewart. Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. 2012
- Swokowski, Eael W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo editorial Iberoamericano. 2000.
- Swokowski, Eael W. Cálculo. Grupo editorial Iberoamericano. 2002
- Thomas, G., Finney R. Cálculo una variable. Novena edición. 2006

WEBGRAFIA

- www.matematicatuya.com
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001285/index.html
- http://148.216.10.84/DIFERENCIAL/INDEX.HTM
- http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351
- http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/
- http://calculo.tripod.com/