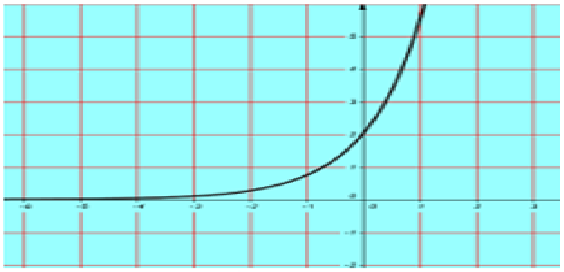
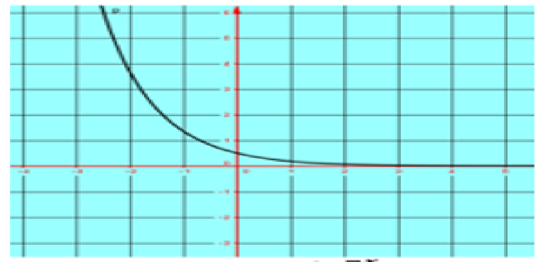
GUIA FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICAS GENERALES

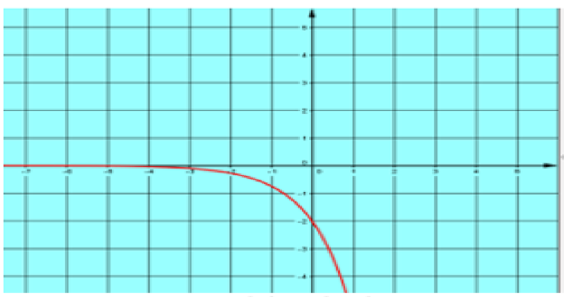
En las siguientes graficas podemos analizar el comportamiento de algunas funciones cuyo exponente es una variable y la base un número real



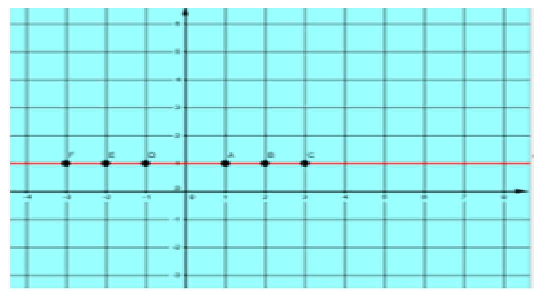
$f(x) = 2^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$



$f(x) = (-2)^x$



$f(x) = 1^x$, cuando $x = 0$

El análisis de los anteriores graficas nos permite definir la ***función exponencial*** restringiendo el número que ocupa la base en la potencia. En primer lugar, la base debe ser positiva para evitar que la función oscile, y en segundo lugar, no puede ser **1** porque esto nos lleva a una función constante.

Se define la ***función exponencial*** como aquella que transforma a cualquier número real en una potencia que tiene por exponente el número real dado y por base un numero positivo diferente de **1.**

$$f(x) = \boldsymbol{a^x}\ donde\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+\ y\ \boldsymbol{a} \neq 1$$

Al examinar las gráficas de la función exponencial, así como cualquier grafica de funciones de la forma $\boldsymbol{a^x}$ con $\boldsymbol{a > 0}\ y\ \boldsymbol{a \neq 1}$, se observa que todo número real tiene imagen. Por lo tanto, ***el dominio son todos los números reales.***

Las funciones exponenciales son *estrictamente crecientes* o *estrictamente decrecientes* dependiendo del valor de la base, si $\boldsymbol{a > 1}$ son ***creciente***s y si $\boldsymbol{a < 1}$ son ***decrecientes***.

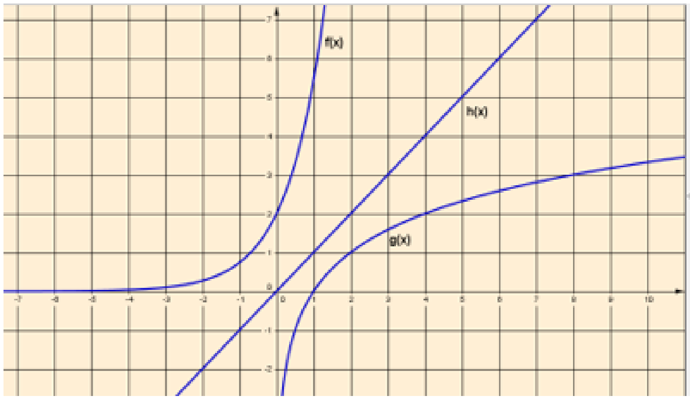
Ejemplo N°1. Hallar el dominio para la función $f(x) = 2^{\sqrt{x-3}}$

- ✓ $Dominio\ f(x) = Dominio\big(f(x) = 2^{\sqrt{x-3}}\big) = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \geq 0\} = [3, +\infty)$

Ejemplo N°2. Hallar el dominio para la función $f(x) = e^{\frac{2}{x^2-3x}}$

- ✓ $Dominio\ f(x) = Dominio\left(f(x) = \frac{2}{x^2-3x}\right) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 3x = 0\} =$
$$\mathbb{R} - \{0,3\}$$

Función logarítmica



$\boldsymbol{f(x) = 2^x\ ,\ \ g(x) = log_2 x\ \ \ y\ \ h(x) = x}$

En la gráfica se ilustra la función exponencial $f(x) = 2^x$ reflejada sobre la recta de la ecuación $f(x) = x$. La representación gráfica de la imagen corresponde a la función inversa de la exponencial. Esta es la función logarítmica.

Como la potenciación es una operación no conmutativa, $2^3 \neq 3^2$, posee dos operaciones inversas. En la expresión $\boldsymbol{x^2 = 81}$, se debe buscar un número que elevado al cuadrado dé **81** como potencia. Para obtenerlo, se utiliza la radicación, $\boldsymbol{\sqrt{81} = 9}$.

En cambio, cundo se desconoce el exponente, la forma de calcularlo es por medio de la logaritmación:

$$\boldsymbol{3^x = 81,\ \ entonces\ \ x = log_3 81 = 4}$$

En el siguiente cuadro se ilustra la relación entre la forma exponencial y la forma logarítmica:

Forma Exponencial	Forma logarítmica
$a^x = x$	$log_a x = y$
$2^4 = 16$	$log_2 16 = 4$
$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$	$log_8 \frac{1}{64} = -2$
$a^0 = 1$	$log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$log_a a = 1$

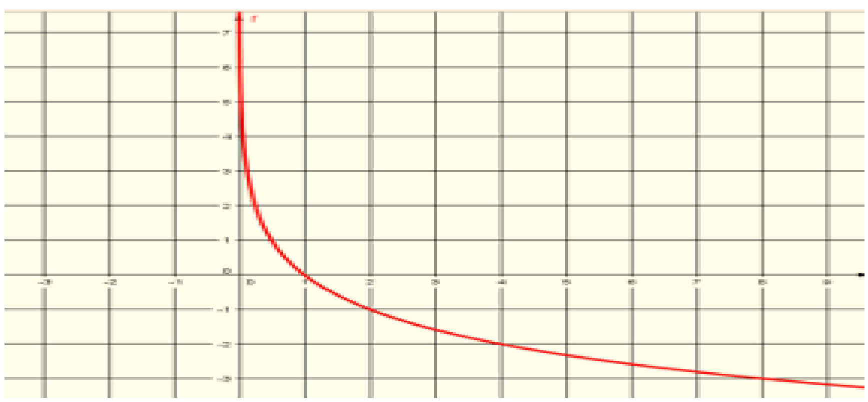
Los logaritmos de números negativos y el cero no existen. Luego, todas las expresiones a las que se les pretenda calcular su logaritmo deben ser mayores que cero.

El procedimiento para calcular su dominio es bastante similar al de las funciones irracionales. Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación, resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio.

El rango está representado por el conjunto de todos los números reales

Ejemplo N°1. Representar gráficamente la función $f(x) = log_{\frac{1}{2}}\, x$ y determinar el dominio de la función.

Solución:



$Grafica\ de\ la\ funcion\ f(x) = log_{\frac{1}{2}}\, x$

$\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**	**2**	**4**	**8**
$\boldsymbol{log_{\frac{1}{2}}\, x}$	**2**	**1**	**0**	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{-3}$

La función $f(x) = log_{\frac{1}{2}}\, x$ no está definida para los números reales negativos ni para cero.

Por ejemplo $f(-2) = log_{\frac{1}{2}}\,(-2)$ no existe porque no hay un número real $\boldsymbol{n}$ tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^n = -2$. De la misma forma no hay número real $\boldsymbol{n}$**,** tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

El dominio de la función $f(x) = log_{\frac{1}{2}}\, x$ es el conjunto de los números reales positivos y el rango corresponde al conjunto de los números reales.

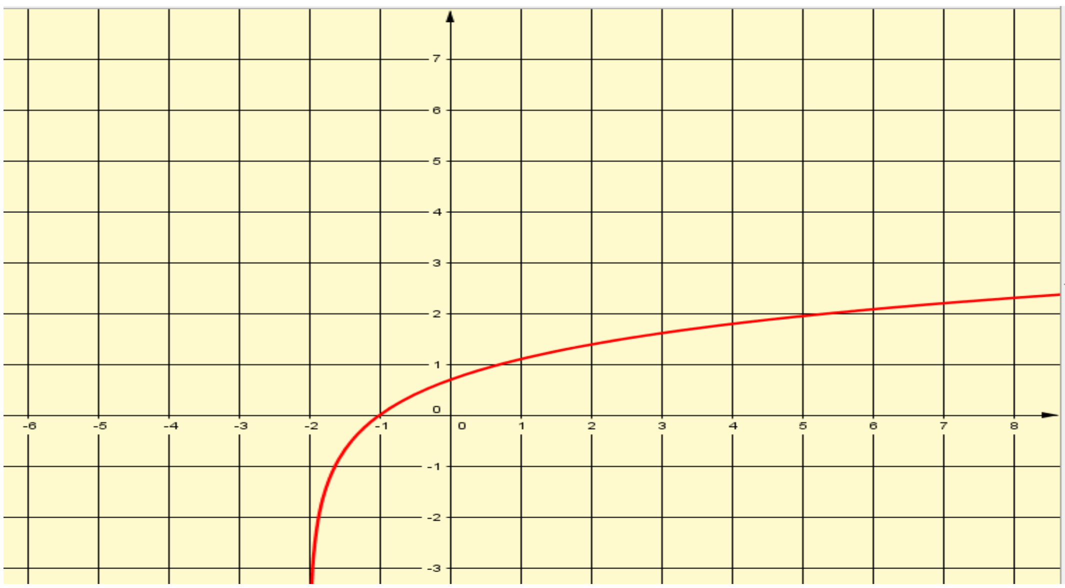
Ejemplo N°2. Determinar dominio y rango de $\boldsymbol{f(x) = log(x+2)}$

Solución:

- ✓ Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación, resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio:

$$\boldsymbol{x + 2 > 0\ ; \quad x > -2}$$

- ✓ $Dominio\ f(x) = (-2, +\infty)$
- ✓ Rango: Todos los $\mathbb{R}$
- ✓ A continuación, se ilustra la grafica



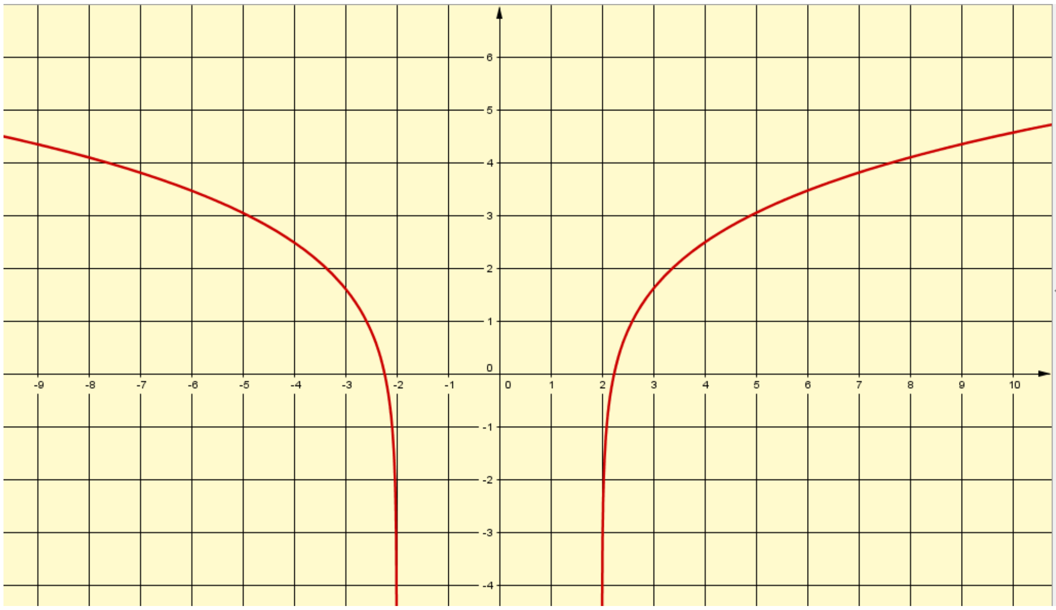
Ejemplo N°3. Determinar dominio y rango de $\boldsymbol{f(x) = log(x^2 - 4)}$

Solución:

- ✓ Tomamos lo que hay dentro del logaritmo y hacemos que sea mayor que cero. A continuación, resolvemos la inecuación y la solución nos da el dominio:

$$\boldsymbol{x^2 - 4 > 0\ \ ;\ \ (x+2)(x-2) > 0}$$
$$\boldsymbol{(x+2) > 0\ \ y\ \ (x-2) > 0}$$
$$\boldsymbol{x > -2\ \ y\ \ x > 2}$$

- ✓ $Dominio\ f(x) = (-\infty, -2,) \cup (2, +\infty)$
- ✓ Rango: Todos los $\mathbb{R}$
- ✓ A continuación, se ilustra la grafica



6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10