1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones lineales, son generalizaciones de ecuaciones de rectas en el plano **xy,** tienen diversas aplicaciones, tales como el balanceo de ecuaciones químicas, resolución de problemas referentes a redes eléctricas, análisis de problemas de insumo, producción en economía, Calcular fuerzas llevadas a ecuaciones en equilibrio en física. Dadas las múltiples aplicaciones de las ecuaciones lineales, su solución será nuestro primer asunto a tratar. Antes de definir *sistemas de ecuaciones lineales,* repasaremos el concepto de ecuación lineal.

La ecuación 8*x* + *y* = *3* se llama **ecuación lineal en las variables *x*** y ***y*** porque su gráfica en el plano *xy* es una recta. El álgebra lineal trata de la generalización de las ecuaciones lineales a *n* variables. Una ecuación de la forma:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n\,x_n = b}$$

Donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ (llamados **coeficientes**) y *b* son constantes numéricas reales y donde no todos los coeficientes ai son iguales a 0, se llama **ecuación lineal en las variables** $x_1, x_2, \dots, x_n$ Porque ejemplo, las ecuaciones

$$\boldsymbol{5x + 2y = 12, 8x - 4y = 7, y\ \ x_1 + \ x_2 + \ \dots + x_n = 0}$$

Son ecuaciones lineales. Todas las variables de una ecuación lineal son de primer grado. La ecuación *5x²* + *3y= 5* no es una ecuación lineal en las variables *x y y,* ya que uno de los términos, $5x^2$, es de grado dos.

Un sistema de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ es un conjunto finito de ecuaciones lineales en dichas variables. Un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{aligned} 3x - 6y + z &= 12 \\ 4x + 2y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables, o incógnitas, se escribe normalmente

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Donde $x_1, x_2, \dots, x_n$son las incógnitas, y los coeficientes **a** y **b** con subíndices, son constantes numéricas reales.

El primer subíndice, i, de los dos que tiene el coeficiente a_{ij} sitúa a_{ij}en la i-esima ecuación del sistema. El segundo subíndice, j de los dos coeficientes a_{ij} ubica a este como el coeficiente de la variable j-esima, x_j del sistema. En particular, a_{21}se encuentra en la segunda ecuación y es el coeficiente de x_1 en dicha ecuación. Una sucesión $c_1, c_2, \dots, c_n$de números reales es una solución de la ecuación lineal.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1$, **si**
$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b_1$

La colección de todas las soluciones de una ecuación lineal se llama **conjunto solución de la ecuación**. Iniciaremos encontrando las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

En general podemos decir que un en un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en R^2 y R^3 se pueden presentar tres tipos de soluciones:

1. Si en el sistema las rectas o los planos tienen un solo punto común de intersección, se dice que tiene **solución única o que el sistema es consistente.**

2. Sí en el sistema las rectas o planos coinciden, **existe un número infinito de soluciones**, por lo tanto también es consistente pues cada punto sobre la recta o el plano es una solución. En R3 se da también en los siguientes casos: sí los tres planos se cortan en una misma recta, o sí dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en una recta.
3. Sí, las rectas o los planos son paralelos, **el sistema no tiene solución y por tanto se dice que es inconsistente.**

Resolvamos un sistema con tres variables y tres ecuaciones.

$$2x - y + 3z + 9 = 0 \quad (ec\,1)$$
$$x + 3y - z - 10 = 0 \quad (ec\,2)$$
$$3x + y - z - 8 = 0 \quad (ec\,3)$$

Solución:

Se utiliza la misma metodología anterior. Se transforma el sistema inicial en otro equivalente pero más sencillo. Primero reducimos a un sistema de dos por dos, es decir dos ecuaciones y dos variables y luego a un sistema de una sola variable y una sola ecuación.

Iniciamos eliminando la variable X, para ello utilizamos, por ejemplo, la ecuación 1 y la ecuación 2, multiplicando la (ec 2) por (-2), así:

$$2x - y + 3z + 9 = 0$$
$$-2x - 6y + 2z + 20 = 0$$

$$-7y + 5z + 29 = 0 \quad (ec\,4)$$

Ahora eliminamos la misma variable x, utilizando la (ec 2) y la (ec 3), multiplicando la segunda ecuación por -3, así:

$$-3x - 9y + 3z + 30 = 0$$
$$3x + y - z - 8 = 0$$

$$-8y + 2z + 22 = 0 \quad (ec\,5)$$

De ésta forma se reduce a un sistema de 2X2, así:

$$-7y + 5z + 29 = 0 \quad (ec\,4)$$
$$-8y + 2z + 22 = 0 \quad (ec\,5)$$

Y continuando la solución como lo hicimos en el sistema de 2x2, veamos:

Ahora eliminamos z, multiplicando la (ec4) por (-2) y la (ec 5) por 5, así:

$$14y - 10z - 58 = 0$$
$$-40y + 10z + 110 = 0$$

$$-26y + 52 = 0; \quad \boldsymbol{y = 2}$$

Remplazando en la (ec 4) o (ec5), el valor de **y**, obtenemos el valor de **z**, Así:

$$-8y + 2z + 22 = 0$$
$$-8(2) + 2z + 22 = 0 \quad \boldsymbol{z = -3}$$

Con los valores de **y** y **z,** reemplazamos en cualquiera de las primeras ecuaciones para obtener el valor de x.

$$x + 3y - z - 10 = 0$$
$$x + 3(2) - (-3) - 10 = 0$$
$$\boldsymbol{x = 1}$$

La solución del sistema es la triada ordenada **(1, 2 ,-3)**

Ejercicios para resolver:

1. $3x1 + x2 - 2x3 - 2 = 0$
   $x1 + 3x2 - x3 - 3 = 0$
   $2x1 - x2 + 4x3 - 5 = 0 \qquad R/\ (1,1,1)$

2. $2x - y + 3z - 14 = 0$
   $-3x + y - z + 10 = 0$
   $x + y + z - 4 = 0 \qquad R/\ (2,-1,3)$

3. $5x - y + 3z - 3 = 0$
   $-2x + y - 2z + 2 = 0$
   $3x + 2y + z - 1 = 0 \qquad R/\ (0,0,1)$

4. $2x - y + 4z - 1 = 0$
   $3x + 2y - 5z + 4 = 0$
   $5x + y - z + 3 = 0$

$R\ (Infinitas\ Soluciones$

Problema de Aplicación

5. Una cafetería tiene 24 mesas, x mesas con 4 asientos cada una, y mesas con 6 asientos cada una, y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad de asientos de la cafetería es de 148. Durante una tarde se ocuparon la mitad de las mesas x, un cuarto de las y mesas y una tercera parte de las z mesas, para un total de 9 mesas. ¿Cuántas de cada tipo se usaron esa tarde?