1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones lineales, son generalizaciones de ecuaciones de rectas en el plano **xy,** tienen diversas aplicaciones, tales como el balanceo de ecuaciones químicas, resolución de problemas referentes a redes eléctricas, análisis de problemas de insumo, producción en economía, Calcular fuerzas llevadas a ecuaciones en equilibrio en física. Dadas las múltiples aplicaciones de las ecuaciones lineales, su solución será nuestro primer asunto a tratar. Antes de definir *sistemas de ecuaciones lineales,* repasaremos el concepto de ecuación lineal.

La ecuación 8*x* + *y* = *3* se llama **ecuación lineal en las variables *x* y *y*** porque su gráfica en el plano *xy* es una recta. El álgebra lineal trata de la generalización de las ecuaciones lineales a *n* variables. Una ecuación de la forma:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b}$$

Donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ (llamados **coeficientes**) y *b* son constantes numéricas reales y donde no todos los coeficientes ai son iguales a 0, se llama **ecuación lineal en las variables** $x_1, x_2, \dots, x_n$ Porque ejemplo, las ecuaciones

$$\boldsymbol{5x + 2y = 12, 8x - 4y = 7, y\ \ x_1 +\ x_2 +\ \dots + x_n = 0}$$

Son ecuaciones lineales. Todas las variables de una ecuación lineal son de primer grado. La ecuación $5x^2 + 3y = 5$ no es una ecuación lineal en las variables *x y y,* ya que uno de los términos, $5x^2$, es de grado dos.

Un sistema de ecuaciones lineales en las variables $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}$ es un conjunto finito de ecuaciones lineales en dichas variables. Un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{aligned} 3x - 6y + z &= 12 \\ 4x + 2y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables, o incógnitas, se escribe normalmente

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Donde $x_1, x_2, \dots, x_n$son las incógnitas, y los coeficientes **a** y **b** con subíndices, son constantes numéricas reales.
El primer subíndice, i, de los dos que tiene el coeficiente a_{ij} sitúa a_{ij}en la i-esima ecuación del sistema. El segundo subíndice, j de los dos coeficientes a_{ij} ubica a este como el coeficiente de la variable j-esima, x_j del sistema. En particular, a_{21}se encuentra en la segunda ecuación y es el coeficiente de x_1 en dicha ecuación. Una sucesión $c_1, c_2, \dots, c_n$de números reales es una solución de la ecuación lineal.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1$, **si**
$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b_1$

La colección de todas las soluciones de una ecuación lineal se llama **conjunto solución de la ecuación**. Iniciaremos encontrando las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

En general podemos decir que un en un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en R^2 y R^3 se pueden presentar tres tipos de soluciones:

1. Si en el sistema las rectas o los planos tienen un solo punto común de intersección, se dice que tiene **solución única o que el sistema es consistente.**

2. Sí en el sistema las rectas o planos coinciden, **existe un número infinito de soluciones**, por lo tanto también es consistente pues cada punto sobre la recta o el plano es una solución. En R3 se da también en los siguientes casos: sí los tres planos se cortan en una misma recta, o sí dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en una recta.
3. Sí, las rectas o los planos son paralelos, **el sistema no tiene solución y por tanto se dice que es inconsistente.**

- ***Métodos de solución de un sistema de ecuación lineal:***

En matemáticas, un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. Una solución para el sistema debe proporcionar un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción. En otras palabras el valor que reemplazamos en las incógnitas debe hacer cumplir la igualdad del sistema.

Los sistemas de ecuaciones lineales expresan varias ecuaciones lineales simultáneamente y admiten un tratamiento matricial. Para su resolución debe haber tantas ecuaciones como incógnitas y el determinante de la matriz ha de ser real y no nulo. Geométricamente corresponden a intersecciones de líneas en un único punto (dos ecuaciones lineales de dos incógnitas), planos en una recta (dos ecuaciones lineales de tres incógnitas) o un único punto (tres ecuaciones lineales de tres incógnitas).

En forma escrita matemáticamente, las variables se representan como $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, y de igual manera cada una de ellas en un sistema de ecuaciones.

En base a lo anteriormente expuesto se puede expresar que un sistema de ecuaciones de 2X2 es una representación gráfica de dos rectas que pueden definir un punto de intersección o de corte entre ellas, lo cual proporciona un punto que es la solución del sistema de ecuaciones de esta dimensión.

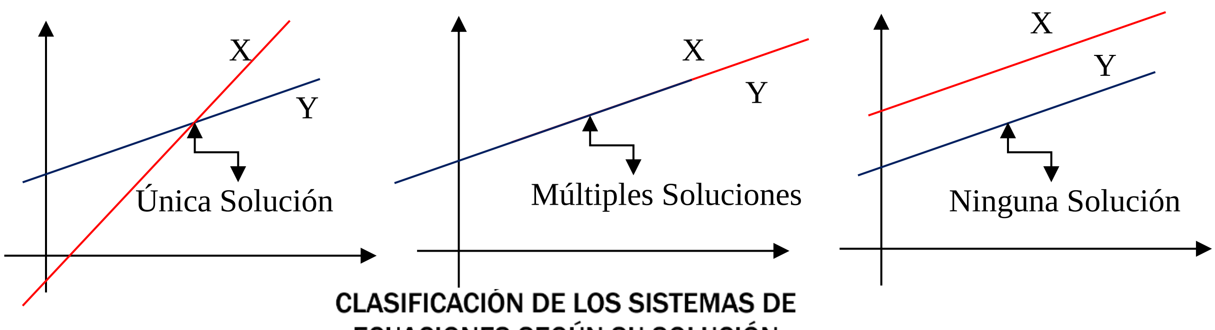
Si aumentamos la dimensión del sistema de ecuaciones a uno de 3X3 en este caso ya no se puede trabajar con líneas sino con tres planos, los cuales tienen un punto común, cuando se intersectan entre ellos. Que de igual manera generan mediante este punto, una solución al sistema de ecuaciones de 3X3.

A sistemas de ecuaciones de mayor dimensión no son explicables físicamente dado que solamente se puede observar tres dimensiones, pero para efectos analíticos de sistema económicos que trabajan más de tres variables es de gran utilidad los sistemas de ecuaciones de mayor dimensión.

Para cualquier sistema de ecuaciones de dimensión nxn se debe tener en cuenta que la solución puede estar en tres alternativas las cuales pueden ser que tenga:

1. *una única solución*
2. *varias soluciones*
3. *ninguna solución*

Para cada uno de los anteriores casos puede proporcionar un gráfico de explicación. Aunque esta dado para dos dimensiones se puede llegar a expandir para más dimensiones.



CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES SEGÚN SU SOLUCIÓN

Gráficas de las ecuaciones	Número de soluciones	Terminología
Rectas que se intersecan en un punto	Sólo una	Consistente e independiente
La misma recta	Infinitas	Consistente y dependiente
Rectas paralelas	Ninguna	Inconsistente e independiente

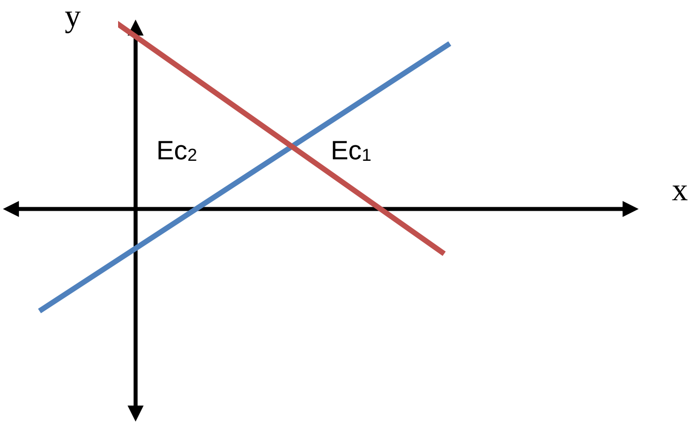
En R2 podemos observar las tres situaciones:

Sea el sistema:

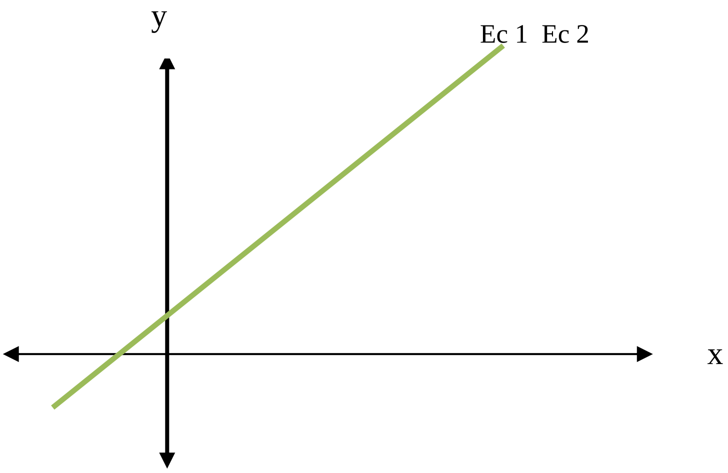
$a_{11}x + a_{12}y = b_1$ $\quad ec_1$

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$ $\quad ec_2$

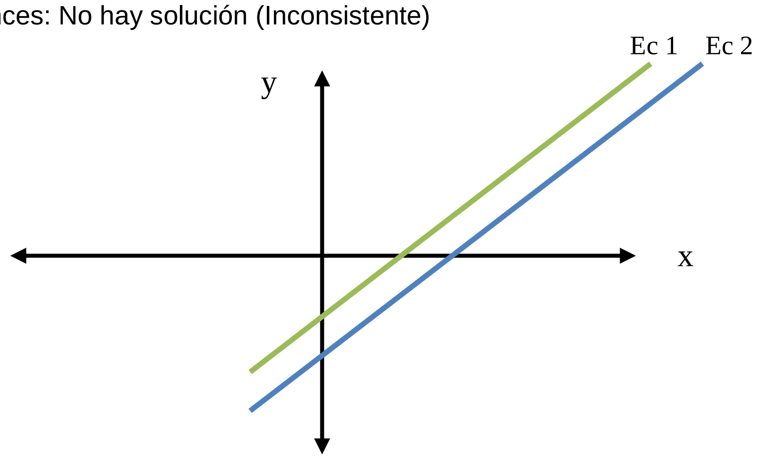
- Sí el conjunto de solución es un par ordenado P(x,y). La solución es única. (consistente)



- Sí se superponen las dos rectas se tiene: Soluciones infinitas (consistente)



- Sí, son paralelas entonces: No hay solución (Inconsistente)



Métodos Algebraicos de Solución Lineal

1. *Sustitución*

El método de sustitución consiste en despejar en una de las ecuaciones cualquier incógnita, preferiblemente la que tenga menor coeficiente, para, a continuación, sustituirla en otra ecuación por su valor.

En caso de sistemas con más de dos incógnitas, la seleccionada debe ser sustituida por su valor equivalente en todas las ecuaciones excepto en la que la hemos despejado. En ese instante, tendremos un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el inicial, en el que podemos seguir aplicando este método reiteradamente.

Por ejemplo, supongamos que queremos resolver por sustitución este sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

En la primera ecuación, seleccionamos la incógnita y por ser la de menor coeficiente y que posiblemente nos facilite más las operaciones, y la despejamos, obteniendo la siguiente ecuación.

$$y = 22 - 3x$$

El siguiente paso será sustituir cada ocurrencia de la incógnita y en la otra ecuación, para así obtener una ecuación donde la única incógnita sea la x.

$$4x - 3(22 - 3x) = -1$$
$$4x - 66 + 9x = -1$$
$$4x + 9x = -1 + 66$$
$$13x = 65$$
$$x = 5$$

Si ahora sustituimos esta incógnita por su valor en alguna de las ecuaciones originales

$$y = 22 - 3x$$
$$y = 22 - 3(5)$$
$$y = 7$$

Obtendremos $x = 5$, $y = 7$, con lo que el sistema queda ya resuelto.

2. *Igualación*

El método de igualación se puede entender como un caso particular del método de sustitución en el que se despeja la misma incógnita en dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí la parte derecha de ambas ecuaciones.

Tomando el mismo sistema utilizado como ejemplo para el método de sustitución,

$$\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

Si despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y = 22 - 3x \\ y = \dfrac{4x + 1}{3} \end{cases}$$

Como se puede observar, ambas ecuaciones comparten la misma parte izquierda, por lo que podemos afirmar que las partes derechas también son iguales entre sí.

$$22 - 3x = \frac{4x + 1}{3}$$

Llegados a este punto, la ecuación resultante es resoluble y podemos obtener el valor de la incógnita x,

$$3(22-3x)=4x+1$$
$$66-9x=4x+1$$
$$-9x-4x=1-66$$
$$-13x=-65$$
$$x=5$$

Y a partir de aquí, sustituyendo dicho valor en una de las ecuaciones originales,

$$y=22-3x$$
$$y=22-3(5)$$
$$y=7$$

Obtendremos $x=5$, $y=7$, con lo que el sistema queda ya resuelto.

3. Reducción o Eliminación

Este método suele emplearse mayoritariamente en los sistemas lineales, siendo pocos los casos en que se utiliza para resolver sistemas no lineales. El procedimiento, diseñado para sistemas con dos ecuaciones e incógnitas, consiste en transformar una de las ecuaciones (generalmente, mediante productos), de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y distinto signo. A continuación, se suman ambas ecuaciones produciéndose así la reducción o cancelación de dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, donde el método de resolución es simple.

Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} 3x+y=22 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$$

No tenemos más que multiplicar la primera ecuación por 3 para poder cancelar la incógnita y. Al multiplicar, dicha ecuación nos queda así:

$$9x+3y=66$$

Si sumamos esta ecuación a la segunda del sistema original:

$$9x+3y=66$$
$$4x-3y=-1$$

Obtenemos una nueva ecuación donde la incógnita y ha sido reducida y que, en este caso, nos da directamente el valor de la incógnita x:

$$13x=65$$
$$x=5$$

El siguiente paso consiste únicamente en sustituir el valor de la incógnita x en cualquiera de las ecuaciones donde aparecían ambas incógnitas, y obtener así que el valor de y

$$3x+y=22$$
$$3(5)+y=22$$
$$y=22-15$$
$$y=7$$

Obtendremos $x=5$, $y=7$, con lo que el sistema queda ya resuelto.

Encuentre la solución al siguiente sistema utilizando cualquiera de los métodos anteriormente mencionados.

$2x - 5y - 19 = 0 \quad (ec1)$
$3x + 4y + 6 = 0 \quad (ec2)$

Solución.

Utilizaremos el método de **eliminación**. Para ello, multiplicamos o dividimos una de las ecuaciones por un número diferente de cero y se lo sumamos a la otra ecuación con el fin de transformar el sistema en una sola ecuación, con una sola variable, de tal forma que reduciendo términos semejantes se encuentre la solución. Así:
Para eliminar X, por ejemplo, multiplicamos la primera ecuación por **3** y la segunda por **-2,** obteniendo así:

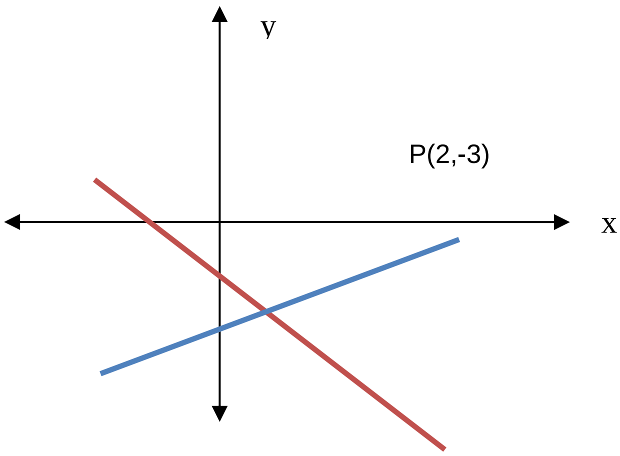
$$6x - 15y - 57 = 0$$
$$-6x - 8y - 12 = 0$$

Sumando tenemos que $-23y - 69 = 0 \;\; por\ tanto\ y = \frac{69}{-23} = -3$

Remplazando (y = -3) en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, en la ecuación (ec_1), obtenemos

$$2x - 5y = 19$$
$$2x - 5(-3) = 19$$
$$2x + 15 = 19$$
$$2x = 19 - 15$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

Gráficamente se tiene: Punto de corte de las dos rectas el par ordenado (2,-3)



TALLER DE APLICACIÓN

Resuelva por el método solicitado y en cada uno compruebe con el método gráfico

1. $2x - 5y + 8 = 0$ Igualación
   $x + 4y - 9 = 0 \quad R/\ (1,2)$

2. $x + 3y = 4$ Sustitución
   $3x - 5y + 2 = 0 \quad R/\ (1,1)$

3. $3x + 2y + 5 = 0$ Reducción o Eliminación
   $6x + 4y - 4 = 0 \quad R\ (Inconsistente)$

4. $4x - y + 3 = 0$
   $8x - 2y + 6 = 0 \quad R\ /\ (infinitas\ soluciones)$

Determine cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son consistentes y cuáles son inconsistentes.

5. $\frac{5y-1}{9} = \frac{2x+1}{3} - 2$ Sustitución
   $\frac{4x-2}{7} = \frac{y+28}{10} - 1$

6. $\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$ Eliminación
   $\frac{1}{5}x + 2y = 8$

7. $x - \frac{3x+4}{7} = \frac{y+2}{3}$ Igualación
   $2y - \frac{5x+4}{11} = \frac{x+24}{2}$

8. $\frac{x+y}{x-y} = -\frac{2}{7}$
   $\frac{8x+y-1}{x-y-2} = 2$

9. La suma de dos números es 190 y 1/9 de su diferencia es 2. Hallar los números

10. Dos números son entre sí como 8 es a -5. Si su diferencia es 39. ¿Cuáles son estos números?

11. La diferencia entre el peso de dos vehículos es 120 kg. Y están en razón de 7:4. ¿Cuál es el peso de cada vehículo?

12. Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es 2/3, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es ½. Hallar la fracción.