

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

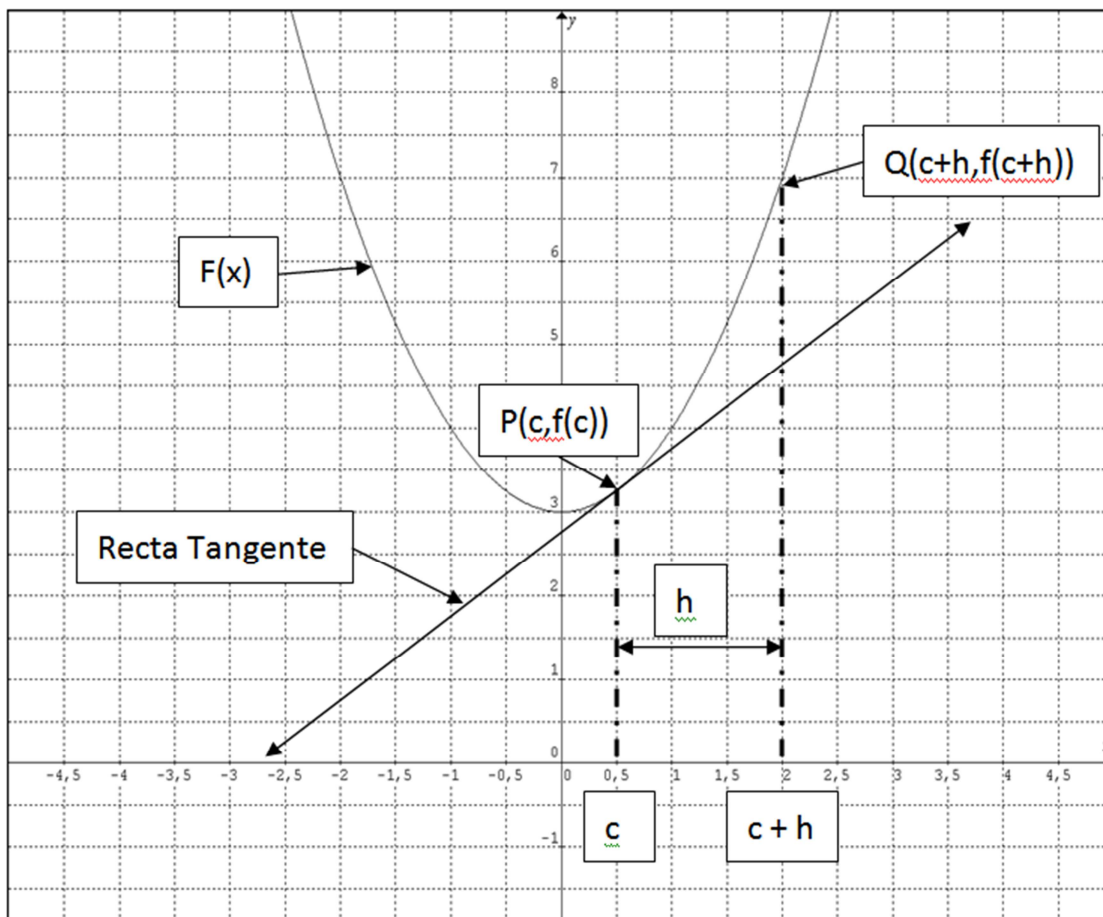
La derivada de una función $f(x)$ respecto de (x) es la función $f'(x)$ (se lee "f prima de (x)) y está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El proceso de calcular la derivada se denomina derivación. Se dice que $f(x)$ es derivable en c si existe $f'(c)$, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ existe}$$

La derivada se puede interpretar como la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto determinado o como una razón de cambio instantánea.



Al calcular el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ lo que sucede es que el punto Q empieza a acercarse hacia el punto P hasta que llegar muy próximo a él (ver gráfica), en ese momento se está calculando la derivada de $f(x)$ en el punto $x=c$ representada por la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$.

REGLAS DE DERIVACIÓN

1. Derivada de una constante

Sea la función $f(x) = c$, donde c es una constante o número real. La derivada será $f'(x) = 0$.

Ejemplo 1: $f(x) = 9$ entonces $f'(x) = 0$

Ejemplo 2: $m(x) = \pi$ entonces $m'(x) = 0$

Ejemplo 3: $h(x) = 3e$ entonces $h'(x) = 0$

2. Derivada de una potencia de x

Sea la Función $f(x) = x^n$, la derivada será $f'(x) = nx^{n-1}$, donde n es cualquier número real.

Ejemplo 1:

$$f(x) = x^3 \text{ entonces } f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Ejemplo 2:

$$t(x) = x^5 \text{ entonces } t'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

Ejemplo 3:

$$r(x) = x^{-2} \text{ entonces } r'(x) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3. Derivada de una constante por una función

Sea la Función $f(x) = cx^n$, la derivada será $f'(x) = cnx^{n-1}$

Ejemplo 1:

$$f(x) = 6x^4 \text{ entonces } f'(x) = 6(4)x^{4-1} = 24x^3$$

Ejemplo 2:

$$h(x) = -2x^3 \text{ entonces } h'(x) = -2(3)x^{3-1} = -6x^2$$

Ejemplo 3:

$$q(x) = 5x^{-6} \text{ entonces } q'(x) = 5(-6)x^{-6-1} = -30x^{-7}$$

Ejemplo 4:

$$p(x) = 6x \text{ entonces } p'(x) = 6(1)x^{1-1} = 6x^0 = 6$$

4. Derivada de una suma o resta de funciones

La derivada de una suma y/o diferencia de funciones es la suma y/o diferencia de las derivadas de cada uno de los términos por separado. Entonces:

$$\text{Sea } h(x) = [f(x) \pm g(x) \pm q(x)]$$

$$\text{La derivada será } h'(x) = [f'(x) \pm g'(x) \pm q'(x)]$$

Ejemplo 1:

$$f(x) = 2x^4 + 8x^2 + 9x - 3$$

$f'(x) = 8x^3 + 16x + 9$ Derivar cada término por separado aplicando las reglas anteriormente vistas.

Ejemplo 2:

$$p(x) = -5x^{-2} - 3x^3 - 12x - 20$$

$$p'(x) = 10x^{-3} - 9x - 12$$

Ejemplo 3:

$$s(x) = -3x^4 - 8x^{-2} - 2x$$

$$s'(x) = -12x^3 + 16x^{-3} - 2$$

Exponentes fraccionarios $x^{\frac{a}{b}}$ y términos de la forma $\sqrt[b]{x^a}$.

Los términos de la forma $\sqrt[b]{x^a}$ para expresarlos como exponente se aplica la propiedad de radicación $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$.

Ejemplo 1: derivar la función $t(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt[3]{x}$

El primer paso es convertir los radicales en exponentes

$$t(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt[3]{x} \quad \text{función inicial}$$

Convertir el término $\sqrt[3]{x}$ en exponente aplicando $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

$$t(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$$

$t'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} - 2\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{5}{3}-1} + \left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1}$ Derivar cada término por separado aplicando las reglas anteriormente vistas.

$$t'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{Simplificando, resultado final.}$$

Ejemplo 2: derivar la función $l(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{5}} - 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^3 + 4$

El primer paso es convertir los radicales en exponentes

$$l(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{5}} - 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^3 + 4 \quad \text{función inicial}$$

Convertir los términos con radical en exponente aplicando $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

$$l(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{5}} - 5x^{\frac{3}{4}} - 2x^3 + 4$$

$l'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)x^{\frac{1}{5}-1} - 5\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{3}{4}-1} - 2(3)x^{3-1}$ Derivar cada término por separado aplicando las reglas anteriormente vistas.

$$l'(x) = \frac{1}{15}x^{-\frac{4}{5}} - \frac{15}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 6x^2 \quad \text{Simplificando, resultado final.}$$

5. Derivada de un producto de funciones

Sea $h(x) = f(x) * g(x)$, la derivada será $h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$.

Es decir, la derivada de un producto de dos funciones es: "la primera, por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera".

6. Derivada de un cociente de funciones

Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, la derivada será $h'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$

Es decir, la derivada de un cociente de dos funciones es: "la segunda, por la derivada de la primera, menos la primera por la derivada de la segunda; dividida entre la segunda al cuadrado".

El producto y cociente de funciones se desarrollará más adelante.

7. Regla de la cadena

Si $h(x) = [f(x)]^n$, entonces la derivada es $h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$

$$h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$$

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones algebraicas de los siguientes tipos:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad \text{Funciones Raíz}$$

$$f(x) = (2x-1)^5 \quad \text{Función con paréntesis elevado a una potencia}$$

Es importante aclarar que la regla de la cadena es de amplio uso en las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Ejemplo 1: derivar $s(x) = (2x^2 + 3)^6$

$s(x) = (2x^2 + 3)^6$ $[f(x)]^n$, en este caso la función $2x^2 + 3$ es la función interna y se encuentra elevada a la 6.

$$s'(x) = 6(2x^2 + 3)^{6-1} * (4x) \quad \text{Aplicar } h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$$

$$s'(x) = 6(2x^2 + 3)^5 * (4x) \quad \text{Organizar términos el 4x pasa a la izquierda}$$

$$s'(x) = 24x(2x^2 + 3)^5 \quad \text{Resultado final}$$

Ejemplo 2: derivar $r(x) = \sqrt[3]{x^2 + 12}$. Aplicando la propiedad de radicación se transforma el radical en exponente. $\sqrt[b]{(f(x))^a} = (f(x))^{\frac{a}{b}}$

$$r(x) = \sqrt[3]{x^2 - 12x} = (x^2 - 12x)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Aplicar propiedad de radicación}$$

$r(x) = (x^2 - 12x)^{\frac{1}{3}}$ $[f(x)]^n$, en este caso la función $x^2 - 12x$ es la función interna y se encuentra elevada a la $\frac{1}{3}$.

$$r'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 12x)^{\frac{1}{3}-1} * (2x - 12) \quad \text{Aplicar } h'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$$

$$r'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 12x)^{-\frac{2}{3}} * (2x - 12)$$

$$r'(x) = \frac{1}{3}(2x - 12)(x^2 - 12x)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{Pasar (2x-12) a la izquierda}$$

$$r'(x) = \left(\frac{2}{3}x - 4\right)(x^2 - 12x)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{Simplificar}$$

$$r'(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}x - 4\right)}{(x^2 - 12x)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{Bajar el término } (x^2 - 12x)^{-\frac{2}{3}} \text{ con potencia positiva}$$


$$r'(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}x - 4\right)}{\sqrt[3]{(x^2 - 12x)^2}} \quad \text{Convertir en radical el término } (x^2 - 12x)^{\frac{2}{3}}$$

8. Función exponencial. aplicación de la regla de la cadena

Si $f(u) = e^u$ su derivada es $f'(u) = e^u * (u')$, la variable u es el exponente de (e) y (u') significa derivada de (u).

Ejemplo 1: derivar $g(x) = e^{2x+1}$

$$g(x) = e^{2x+1} \quad \text{Función inicial}$$

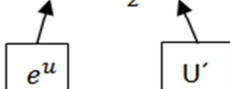
$$g'(x) = e^{2x+1} * (2) \quad \text{Aplicar la fórmula } f'(u) = e^u * (u')$$


$$g'(x) = e^{2x+1} * (2) \quad \text{Pasar el número 2 a la izquierda}$$

$$g'(x) = 2e^{2x+1} \quad \text{Respuesta}$$

Ejemplo 2: derivar $g(x) = e^{x^{\frac{1}{2}}+x}$

$$g(x) = e^{x^{\frac{1}{2}}+x} \quad \text{Función inicial}$$

$$g'(x) = e^{x^{\frac{1}{2}}+x} * \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\right) \quad \text{Aplicar fórmula } f'(u) = e^u * (u')$$


$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\right)e^{x^{\frac{1}{2}}+x} \quad \text{El término } \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\right) \text{ pasa a la izquierda}$$

Ejemplo 3: derivar $g(x) = e^{-4x^3+5x}$

$$g(x) = e^{-4x^3+5x} \quad \text{Función inicial}$$

$$g'(x) = e^{-4x^3+5x} * (-12x^2 + 5) \quad \text{Aplicar fórmula } f'(u) = e^u * (u')$$

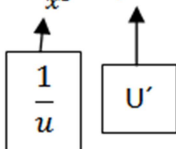
$$g'(x) = (-12x^2 + 5)e^{-4x^3+5x} \quad \text{El término } (-12x^2 + 5) \text{ pasa a la izquierda}$$

9. Función logaritmo Natural (Ln), aplicación de la regla de la cadena

Si $f(u) = \text{Ln}(u)$ su derivada es $f'(u) = \frac{1}{u} * (u')$, la variable (u) es la que acompaña al logaritmo natural y (u') es la derivada de (u).

Ejemplo 1: derivar $q(x) = \text{Ln}(x^3)$

$$q(x) = \text{Ln}(x^3) \quad \text{Función inicial}$$

$$q'(x) = \frac{1}{x^3} * (3x^2) \quad \text{Aplicar la fórmula } f'(u) = \frac{1}{u} * (u')$$


$$q'(x) = \frac{3x^2}{x^3} \quad \text{Organizar la expresión como fracción para simplificar}$$

$$q'(x) = \frac{3}{x} \quad \text{Respuesta}$$

Ejemplo 2: derivar $m(x) = \ln(5x^4 - 4x^2)$

$m(x) = \ln(5x^4 - 4x)$ Función inicial

$$m'(x) = \frac{1}{(5x^4 - 4x)} * (20x^3 - 8x) \text{ Aplicar la fórmula } f'(u) = \frac{1}{u} * (u')$$

$$m'(x) = \frac{(20x^3 - 8x)}{(5x^4 - 4x)} \text{ Organizar los términos como fracción para simplificar}$$

$$m'(x) = \frac{4x(5x^2 - 2)}{x(5x^3 - 4)} \text{ Factorizar por factor común y simplificar}$$

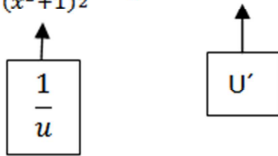
$$m'(x) = \frac{4(5x^2 - 2)}{(5x^3 - 4)} \text{ Respuesta}$$

Ejemplo 3: derivar $n(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$

$n(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$ Función inicial

$$n(x) = \ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \text{ Convertir el radical } \sqrt{x^2 + 1} \text{ en exponente}$$

$$n'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} * \left[\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} * (2x) \right] \text{ Aplicar } f'(u) = \frac{1}{u} * (u')$$



Para derivar la función $(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ mirar el tema de regla de la cadena para funciones algebraicas visto anteriormente.

$$n'(x) = \frac{(2x)(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{2(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{ Organizar los términos como fracción para simplificar}$$

$$n'(x) = \frac{(x)(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{ Simplificar los términos de bases iguales } x^2 + 1$$

$$n'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{ Aplicar propiedad de potenciación de bases iguales}$$

$$n'(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ Respuesta}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

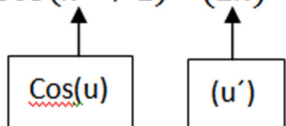
10. Función Seno

Si $f(u) = \text{Sen}(u)$, su derivada es $f'(u) = \text{Cos}(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña al Seno y (u') es la derivada de u.

Ejemplo 1: derivar $f(x) = \text{Sen}(x^2 + 1)$

$$f(x) = \text{Sen}(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \text{Cos}(x^2 + 1) * (2x) \text{ Aplicar } f'(u) = \text{Cos}(u) * (u')$$



$$f'(x) = \text{Cos}(x^2 + 1) * (2x) \text{ Pasar el término } 2x \text{ a la izquierda}$$

$$f'(x) = 2x \text{Cos}(x^2 + 1) \text{ Respuesta}$$

11. Función Coseno

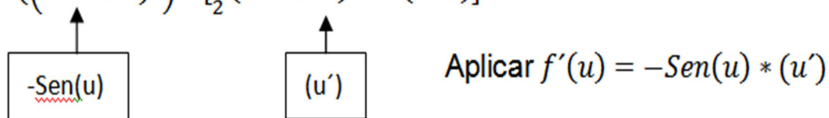
Si $f(u) = \text{Cos}(u)$, su derivada es $f'(u) = -\text{Sen}(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña al Coseno y (u') es la derivada de u.

Ejemplo 2: derivar $g(x) = \text{Cos}(\sqrt{2x^3 + 4})$

$$g(x) = \text{Cos}(\sqrt{2x^3 + 4})$$

$$g(x) = \text{Cos}((2x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}) \quad \text{Convertir el radical } \sqrt{2x^3 + 4} \text{ a exponente}$$

$$g'(x) = -\text{Sen}((2x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}) * [\frac{1}{2}(2x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}} * (6x^2)]$$



Para derivar la función $(2x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}$ mirar el tema de regla de la cadena para funciones algebraicas visto anteriormente.

$$g'(x) = -\text{Sen}((2x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}) * [3x^2(2x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}}] \quad \text{Simplificar y organizar (u')}$$

$$g'(x) = -3x^2(2x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}}\text{Sen}((2x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}) \quad \text{Pasar a la izquierda } 3x^2(2x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = -3x^2(2x^3 + 4)^{-\frac{1}{2}}\text{Sen}((2x^3 + 4)^{\frac{1}{2}}) \quad \text{Respuesta}$$

12. Función Tangente

Si $f(u) = \text{tan}(u)$, su derivada es $f'(u) = \text{Sec}^2(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña a la tangente y (u') es la derivada de u.

Ejemplo 3: derivar $h(x) = \text{tan}(2x^4 - x^2)$

$$h(x) = \text{tan}(2x^4 - x^2)$$

$$h'(x) = \text{Sec}^2(2x^4 - x^2) * (8x^3 - 2x) \quad \text{Aplicar } f'(u) = \text{Sec}^2(u) * (u')$$



$$h'(x) = \text{Sec}^2(2x^4 - x^2) * (8x^3 - 2x) \quad \text{Pasar el término } 8x^3 - 2x \text{ a la izquierda}$$

$$h'(x) = (8x^3 - 2x) \text{Sec}^2(2x^4 - x^2) \quad \text{Respuesta}$$

13. Función Secante

Si $f(u) = \text{sec}(u)$, su derivada es $f'(u) = \text{Sec}(u) * \text{tan}(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña a secante y (u') es la derivada de u.

Ejemplo 4: derivar $l(x) = \text{Sec}(\sqrt{x} + 2)$

$$l(x) = \text{Sec}(\sqrt{x} + 2)$$

$$l(x) = \text{Sec}(x^{\frac{1}{2}} + 2) \quad \text{Convertir el término } \sqrt{x} \text{ a exponente}$$

$$l'(x) = \text{Sec}(x^{\frac{1}{2}} + 2) * \text{tan}(x^{\frac{1}{2}} + 2) * (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{Aplicar } f'(u) = \text{Sec}(u) \text{tan}(u) * (u')$$

$$l'(x) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\sec\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right)\tan\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right)$$

14. Función Cotangente

Si $f(u) = \cot(u)$, su derivada es $f'(u) = -\csc^2(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña a cotangente y (u') es la derivada de u.

Ejemplo 5: derivar $t(x) = \cot(5x^2 - x)$

$$t(x) = \cot(5x^2 - x)$$

$$t'(x) = -\csc^2(5x^2 - x) * (10x - 1) \quad \text{Aplicar } f'(u) = -\csc^2(u) * (u')$$

$$t'(x) = -(10x - 1)\csc^2(5x^2 - x)$$

$$t'(x) = (1 - 10x)\csc^2(5x^2 - x)$$

15. Función Cosecante

Si $f(u) = \csc(u)$, su derivada es $f'(u) = -\csc(u) * \cot(u) * (u')$, la variable (u) es la que acompaña a cosecante y (u') es la derivada de u.

Ejemplo 6: derivar $p(x) = \csc(5\sqrt[3]{x^5} - 2)$

$$p(x) = \csc(5\sqrt[3]{x^5} - 2)$$

$$p(x) = \csc(5x^{\frac{5}{3}} - 2) \quad \text{Convertir el término } 5\sqrt[3]{x^5} \text{ en exponente}$$

$$p'(x) = -\csc\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right)\cot\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right) * \left(\frac{25}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$p'(x) = -\frac{25}{3}x^{\frac{2}{3}}\csc\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right)\cot\left(5x^{\frac{5}{3}} - 2\right) \quad \text{Aplicar } f'(u) = -\csc(u)\cot(u) * (u')$$

DERIVADAS DE PRODUCTOS Y COCIENTES

Regla del producto. Multiplicación de funciones

Sea $h(x) = f(x) * g(x)$, la derivada será $h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$.

Regla del cociente. División de funciones

Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, la derivada será $h'(x) = \frac{g(x)*f'(x) - f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejemplo1: derivar $m(x) = x\sqrt{x-3}$.



Como se puede observar es un **producto de funciones**, para derivar se utiliza:

$$h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$$

Identificación de los términos en la función $m(x) = x\sqrt{x-3}$

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \sqrt{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{2}}$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} * (1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Simplificando}$$

Aplicando la regla del producto para $m(x) = x\sqrt{x-3}$

$$m'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$$

$$m'(x) = (x) * \left(\frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}\right) + (x-3)^{\frac{1}{2}} * (1) \quad \text{Remplazando en la fórmula}$$

$$m'(x) = \frac{x}{2} * (x-3)^{-\frac{1}{2}} + (x-3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Simplificar la expresión}$$

$$m'(x) = (x-3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2} + (x-3)\right) \quad \text{Factorizar } (x-3) \text{ por facto común}$$

$$m'(x) = (x-3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2} + x - 3\right) \quad \text{Simplificar, romper paréntesis}$$

$$m'(x) = (x-3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x - 3\right) \quad \text{Operar términos semejantes}$$

$$m'(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}x-3\right)}{(x-3)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Pasar el término } (x-3)^{-\frac{1}{2}} \text{ al denominador cambia de signo el exponente por propiedad de potenciación}$$

$$m'(x) = \frac{\left(\frac{3}{2}x-3\right)}{\sqrt{x-3}} \quad \text{Convertir el término del denominador en radical. Respuesta}$$

Ejemplo 2: derivar $t(x) = \frac{x^3}{2x-1} \quad \frac{f(x)}{g(x)}$

Como se puede observar es un **cociente de funciones**, para derivar se utiliza:

$$h'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Identificación de los términos en la función $t(x) = \frac{x^3}{2x-1} \quad \frac{f(x)}{g(x)}$

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = 2x - 1$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = 3x^2$$

$$g'(x) = 2$$

Aplicando la regla de cociente para $t(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

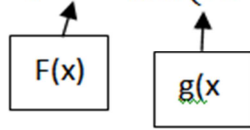
$$t'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$t'(x) = \frac{(2x-1)*(3x^2)-(x^3)*(2)}{(2x-1)^2} \quad \text{Remplazar en la fórmula}$$

$$t'(x) = \frac{6x^3-3x^2-2x^3}{(2x-1)^2} \quad \text{Realizar operaciones}$$

$$t'(x) = \frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2} \quad \text{Reducción de términos semejantes, respuesta}$$

Ejemplo 3: derivar $q(x) = e^{2x^2+4} \text{Cos}(7x^3)$



Como se puede observar es un **producto de funciones**, para derivar se utiliza:

$$h'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$$

Identificación de los términos en la función $q(x) = e^{2x^2+4} \text{Cos}(7x^3)$

$$f(x) = e^{2x^2+4}$$

$$g(x) = \text{Cos}(7x^3)$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = e^{2x^2+4} * (4x)$$

$$f'(x) = 4xe^{2x^2+4}$$

$$g'(x) = -\text{Sen}(7x^3) * 21x^2$$

$$g'(x) = -21x^2 \text{Sen}(7x^3)$$

Aplicando la regla del producto para $q(x) = e^{2x^2+4} \text{Cos}(7x^3)$

$$q'(x) = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$$

Remplazando en la fórmula

$$q'(x) = (e^{2x^2+4}) * (-21x^2 \text{Sen}(7x^3)) + (\text{Cos}(7x^3)) * (4xe^{2x^2+4})$$

$$q'(x) = -21x^2 \text{Sen}(7x^3) e^{2x^2+4} + 4x \text{Cos}(7x^3) e^{2x^2+4} \quad \text{Organizar y simplificar}$$

$$q'(x) = xe^{2x^2+4} (-21x \text{Sen}(7x^3) + 4 \text{Cos}(7x^3)) \quad \text{Factorizar por factor común}$$

$$q'(x) = xe^{2x^2+4} (-21x \text{Sen}(7x^3) + 4 \text{Cos}(7x^3)) \quad \text{Respuesta.}$$

Ejemplo 4: derivar $s(x) = \frac{\text{Ln}(3x^4-3x)}{x^3+2} \quad \frac{f(x)}{g(x)}$

Como se puede observar es un **cociente de funciones**, para derivar se utiliza:

$$h'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Identificación de los términos en la función $s(x) = \frac{\text{Ln}(3x^4)}{x^3+2} \quad \frac{f(x)}{g(x)}$

$$f(x) = \text{Ln}(3x^4)$$

$$g(x) = x^3 + 2$$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{(3x^4)} * (12x^3)$$

$$f'(x) = \frac{12x^3}{3x^4} = \frac{4}{x}$$

$$g'(x) = 3x^2$$

Aplicando la regla de cociente para $s(x) = \frac{\text{Ln}(3x^4)}{x^3+2}$

$$s'(x) = \frac{g(x)*f'(x)-f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$s'(x) = \frac{(x^3+2)*\left(\frac{4}{x}\right) - \text{Ln}(3x^4)*3x^2}{(x^3+2)^2} \quad \text{Remplazando en la fórmula}$$

$$s'(x) = \frac{(4x^2 + \frac{8}{x}) - 3x^2 \ln(3x^4)}{(x^3 + 2)^2}$$

Realizar operaciones y organizar

$$s'(x) = \frac{(4x^2 + 8x^{-1}) - 3x^2 \ln(3x^4)}{(x^3 + 2)^2}$$

$$s'(x) = \frac{x^{-1}(4x^3 + 8 - 3x^3 \ln(3x^4))}{(x^3 + 2)^2}$$

Factorizar por factor común, respuesta

Tabla de Derivadas

Función	Derivada	Ejemplos	
Constante			
$y=c$	$y'=0$	$y=8$	$y'=0$
Identidad			
$y=x$	$y'=1$	$y=x$	$y'=1$
Funciones Potenciales			
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$	$y = (2x^2 + 1)^3$	$y' = 3(2x^2 + 1)^2 \cdot 4x$
$y = \frac{1}{u^m}$	$y' = -\frac{mu'}{u^{m+1}}$	$y = \frac{1}{(2x + 1)^3}$	$y' = -\frac{6}{(2x + 1)^4}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}}$
Funciones Exponenciales			
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} \ln 5$
Funciones Logarítmicas			
$y = L u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = L(x^2 + 7x)$	$y' = \frac{2x + 7}{x^2 + 7x}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$y = \log_2(5x + 7)$	$y' = \frac{5}{5x + 7} \log_2 e$

Funciones Trigonométricas

$y = \text{sen } u$	$y' = u' \cos u$	$y = \text{sen } 5x$	$y' = 5 \cos 5x$
$y = \text{cos } u$	$y' = -u' \text{sen } u$	$y = \text{cos } 3x^2$	$y' = -6x \text{sen } x^2$
$y = \text{tg } u$	$y' = u' \sec^2 u$	$y = \text{tg } 7x$	$y' = 7 \sec^2 7x$
$y = \text{cot } gu$	$y' = u' \text{cosec}^2 u$	$y = \text{cot } g(4x + 5)$	$y' = -4 \text{cosec}^2(4x + 5)$
$y = \text{sec } u$	$y' = u' \text{sec } u \cdot \text{tg } u$	$y = \text{sec } x^3$	$y' = 3x^2 \text{sec } x^3 \text{tg } x^3$
$y = \text{cosec } u$	$y' = -u' \text{cosec } u \text{cot } gu$	$y = \text{cosec } x^2$	$y' = -2x \text{cosec } x^2 \text{cot } gx^2$
$y = \text{arcsen } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \text{arcsen } x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$y = \text{arccos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \text{arccos } 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$
$y = \text{arctg } u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = \text{arctg } 3x$	$y' = \frac{3}{1+9x^2}$

Derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones

$y = ku$	$y' = ku'$	$y = 3x^5$	$y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = 3x^2 - 2x + 5$	$y' = 6x - 2$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^2 \cos x$	$y' = 2x \cos x + x^2(-\text{sen } x)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$	$y' = \frac{4x(x^3 - 1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplicando los teoremas adecuados realizar las siguientes derivadas:

1. $f(x) = -128$

2. $y = 3\pi$

3. $g(x) = 4x^2 - \frac{1}{4x^4}$

4. $f(t) = t^4 + \frac{3}{t^2} + 6t^{-3}$

5. $g(n) = 6\sqrt{n} - \frac{3\sqrt[3]{n^2}}{5} + \frac{4}{\sqrt[3]{n^5}} - \frac{1}{3x^3}$

6. $y = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

7. $k(x) = (7 - 3x^3)^1(4x^4 - 2x^2 + 3x - 7)$

8. $h(x) = (2x - 13)(x^2 + 3x - 2)$

9. $y = \frac{x^3 - 8}{x^3 + 8}$

10. $y = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$

11. $y = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

12. $f(x) = (x^2 + x - 1)^3$

13. $g(t) = \frac{(2t^2+1)^2}{(3t^3+1)^3}$

14. $m(x) = \left(\frac{x^2+3}{5x-8}\right)^2$

15. $f(x) = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

16. $y = \ln(4x - 5)$

17. $y = x \ln x - x$

18. $f(t) = e^{5t}$

19. $f(m) = m^2 e^m$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplicando los teoremas adecuados realizar las siguientes derivadas:

1. $f(x) = \frac{\cos(x^3) + \operatorname{sen} x}{x^2}$

2. Dada $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$ comprobar que la derivada es: $\frac{4x^2 + 1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$

3. Derivar implícitamente la función $f(x) = y\sqrt{2+3x} + x\sqrt{1+y}$

encontrando x'

4. Comprobar que el resultado de la derivada de $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$
es $2\sqrt{a^2 - x^2}$

5. Calcular y' si se tiene que y está definido en forma implícita por la ecuación:

$$\ln(x + y) = x^2 + y^2$$

6. Utilizando la derivación logarítmica para la función $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^2 + 1}(2x + 3)(x^3 + 2)}{(3x + 1)(x - 4)}$

7. Calcular la derivada de $f(x) = \ln \frac{\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{3x+2}}{(x^2+1)^5}$

8. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $f(x) = \ln(2x-1)$ en el punto (1,0).