



1.1. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

LÓGICA

La lógica es un tratado que significa Razón; la cual emplea símbolos matemáticos para representar proposiciones y ayuda a determinar la verdad o falsedad de éstas. Fue Aristóteles (384 – 322 a.C.) quien estudió por primera vez en forma sistemática la lógica. Muchos eruditos del Medioevo encontraron fascinante la lógica y la estudiaron ampliamente. Estos sabios emplearon únicamente palabras en sus estudios. No fue sino hasta el siglo XVII cuando las matemáticas empezaron a reconocer que, si empleaban símbolos matemáticos en el estudio de la lógica, ésta podría ser de gran utilidad como una herramienta en el estudio de la matemática misma. Este desarrollo de la lógica como un instrumento matemático fue iniciado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Trabajo que continuó más tarde George Boole (1815-1864) con su libro “Una Investigación de las leyes del pensamiento”.

1.2. PROPOSICIONES Y SU CLASIFICACIÓN

LÓGICA PROPOSICIONAL

Es un sistema lógico que trata la clase de argumentos cuya validez exclusivamente dependen de cómo están conectados los enunciados.

PROPOSICIONES Y CONECTORES LÓGICOS:

Una proposición o enunciado es una oración diofántica (bivalente) que puede ser V o F, pero no puede tener estos dos valores de verdad al tiempo.

La proposición es un elemento fundamental de la lógica proposicional

Cada proposición tiene una forma lógica la cual se expresa con un nombre o variable proposicional. Se distinguen cuatro tipos de proposiciones:

- Enunciados Abiertos
- Enunciados Cerrados
- Proposiciones Simples
- Proposiciones Compuestas

a) ENUNCIADOS ABIERTOS:

Un enunciado abierto es una oración donde el sujeto de la acción no se identifica claramente. Un enunciado abierto que involucra una igualdad y en la que se desconocen uno o varios de sus términos se llama ECUACIÓN.

Ejemplo:

x es un número par y primo
y es un día de la semana.

b) ENUNCIADOS CERRADOS:

Es un enunciado que puede ser VERDADERO o FALSO, cuando identificamos claramente el sujeto que realiza la acción.

Un enunciado abierto, puede convertirse en un enunciado cerrado, verdadero o falso, al sustituir el término variable por un término constante elegido de un conjunto referencial.

Ejemplo:

2 es un número par y primo	(Verdadero)
7 es un número par y primo	(Falso)
Carlos es un día de la semana	(Falso)
Jueves es un día de la semana	(Verdadero)



c) PROPOSICIONES SIMPLES:

Una proposición se considera simple si en ella no intervienen conectores lógicos o términos de enlace.

Las proposiciones simples se representan mediante las letras del alfabeto español p, q, r, s, t, usadas comúnmente. A las cuales se les denomina variables proposicionales.

Ejemplo:

p: Camila estudia Ingeniería de Sistemas

q: Laura estudia Tecnología en desarrollo de aplicaciones informáticas

ENLACES LÓGICOS:

Los conectores son las contrapartidas formales de las conjunciones gramaticales, mediante las cuales formamos de enunciados simples, otros llamados compuestos.

“y”	se representa	“ \wedge ”
“o”	se representa	“ \vee ”
“Si...entonces...”	se representa	“ \Rightarrow ” o “ \rightarrow ”
“...si y sólo si...”	se representa	“ \Leftrightarrow ” o “ \leftrightarrow ”
“No..., ni...”	se representa.	“ \neg , \sim ”

d) PROPOSICIONES COMPUESTAS:

Una proposición compuesta es un enunciado de verdad que está compuesto por dos o más proposiciones simples, unidas mediante conectores lógicos, formando una nueva oración.

Una proposición se considera compuesta si se juntan dos o más proposiciones simples con términos de enlace o conectores.

Los conectores o términos de enlace y, "o", "Si...entonces", "Si y solo si" se usan para ligar dos proposiciones, el término "no" se agrega a una sola proposición.

Ejemplos:

p: Hoy es día miércoles.

q: Hay clase de lógica matemática.

Estas proposiciones son simples, y con ellas se puede formar o construir proposiciones compuestas.

Como:

- a. Hoy es día miércoles y hay clase de lógica matemática.
se presenta simbólicamente así: “p y q”
En notación lógica: $p \wedge q$
- b. Hoy es día miércoles o hay clase de lógica matemática.
se presenta simbólicamente así: “p o q”
En notación lógica: $p \vee q$
- c. Si hoy es día miércoles entonces hay clase de lógica matemática.
se presenta simbólicamente así: “Si p entonces q”
En notación lógica: $p \rightarrow q$
- d. Hoy es día miércoles si y sólo si hay clase de lógica matemática.
se presenta simbólicamente así: “p si y sólo si q”
En notación lógica: $p \leftrightarrow q$
- e. Hoy no es día miércoles, ni hay clase de lógica matemática.
se presenta simbólicamente así: “no p, ni q”
En notación lógica: “ $\neg p, \neg q$ ”

SIGNOS DE AGRUPACIÓN:

- () Paréntesis
- [] Corchetes
- { } Llaves

Con estos elementos del vocabulario, variables, conectivos y signos de agrupación se puede presentar la sintaxis de la lógica, podemos explicitar las reglas sintácticas mediante las cuales podemos formar proposiciones moleculares a partir de otras fórmulas o proposiciones atómicas.



VALORES DE VERDAD DE UNA PROPOSICIÓN

Una proporción puede tener un solo valor de verdad, así este conformando una proposición compuesta.

Pueden suceder las siguientes probabilidades de acuerdo a cada opción de trabajo:

Si es una proporción Simple

P
V
F

Si son proposiciones compuestas, depende del número de proposiciones compuestas:

Si son 2 proposiciones

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

Si Son 3 Proposiciones

P	Q	R
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Si observamos, de acuerdo con el número de proposiciones simples, que conformen una proporción compuesta, obedece a la sucesión $\{2^n\}$

Si es una proposición $\{2^n\} = \{2^1\} = 2$, quiere decir que tiene 2 valores de verdad.

Si una proposición compuesta, tiene 2 proposiciones simples, tendríamos que $\{2^n\} = \{2^2\} = 4$; es decir, cada proposición puede tener cuatro valores de verdad.

Si una proposición compuesta, tiene 3 proposiciones simples, tendríamos que $\{2^n\} = \{2^3\} = 8$; es decir, cada proposición puede tener ocho valores de verdad. Y así sucesivamente.

1.3. CONECTORES LÓGICOS. CONECTIVOS LÓGICOS

CONJUNCIÓN

La conjunción es una proposición compuesta que resulta de unir las proposiciones simples con el enlace "y".

Símbolo: " \wedge "

Enunciado compuesto: $p \wedge q$

Significado: "y",... "pero"....."aunque"...

Ejemplo:

"El automóvil enciende cuando tiene gasolina y tiene corriente la batería"

p: El automóvil enciende cuando tiene gasolina.

q: El automóvil enciende cuando tiene corriente.

Se representa $p \wedge q$

La tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Según esto:

p: V Significa que el auto tiene gasolina en el tanque

q: V Significa que la batería tiene corriente

$p \wedge q = V$ Representa que el auto puede encender.

Si p o q tiene como valor de verdad F implica que no tiene gasolina en el tanque o no tiene energía la batería y que por lo tanto no puede encender.

Conclusión:

Una conjunción es verdadera cuando las proposiciones simples que la forman son verdaderas.



UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
AREA: DE CIENCIAS BASICAS
FUNDAMENTOS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO

DISYUNCIÓN

La disyunción es una proposición compuesta que resulta de unir las proposiciones simples con el enlace "o".

DISYUNCIÓN

La disyunción es una proposición compuesta que resulta de unir las proposiciones simples con el enlace "o".

Su símbolo: " \vee "

Enunciado compuesto: " $p \vee q$ "

Significado "...o..., ...u...."

Con este conector se obtiene un valor de verdad V cuando alguna de las dos proposiciones es verdadera.

Ejemplo:

"Una persona puede entrar al teatro si compra el boleto u obtiene una invitación gratuita"

p: Una persona entra al teatro si compra el boleto.

q: Una persona entra al teatro si obtiene una invitación gratuita.

Se representa $p \vee q$.

La tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La única forma en la que no puede ingresar al teatro ($p \vee q = F$), es que no compre su boleto ($p=F$) y que no obtenga una invitación gratuita ($q = F$)

NEGACIÓN

La Negación es una proposición simple, que resulta de contradecir el sentido de verdad de dicha proposición.

Su símbolo: " \neg , \sim "

Su enunciado compuesto: " $\neg p$, $\sim p$ "

Su significado: "No, no es cierto que..., ni"

Su función es negar los enunciados o proposiciones, esto significa que si alguna proposición es verdadera y se aplica el operador su negación es Falso.

Ejemplo:

p: Hoy está lloviendo.

Su negación: $\neg p$: Hoy no está lloviendo

La tabla de verdad es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

CONDICIONAL O IMPLICACIÓN

Una condicional es una proposición de la forma "Si p entonces q", donde "p es una condición suficiente para que q se cumpla". Su símbolo: " \Rightarrow "o" \rightarrow "

Su enunciado compuesto: $p \rightarrow q$ o $p \Rightarrow q$

Su significado: "Si ... entonces..."

Una proposición condicional está compuesta por dos proposiciones simples: que se llaman p (*antecedente*) y q (*consecuente*)

Hipótesis y o Tesis.

$p \rightarrow q$
Antecedente *Consecuente*

Ejemplo:

Un candidato a la alcaldía dice:

Si salgo elegido alcalde, entonces los niños recibirán alimentación gratuita.

p: Salió elegido alcalde.

q: Los niños recibirán alimentación gratuita.

Se representa: $p \rightarrow q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERIA SECCIONAL BOGOTA
 AREA: DE CIENCIAS BASICAS
 FUNDAMENTOS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Cuando $p=V$ significa que salió elegido, y $q=V$ significa que los niños recibirán alimentación gratuita, por tanto $p \rightarrow q = V$ y el candidato cumplió su palabra.

Cuando $p=V$ y $q=F$ significa que $p \rightarrow q = F = F$, el candidato no cumplió por que fue elegido y no le dio alimentación gratuita a los niños.

Cuando $p=F$ y $q=V$ significa que, aunque el candidato no fue elegido le dio alimentación gratuita a los niños, por tanto $p \rightarrow q = V$

Conclusión:

La Condicional es una proposición compuesta falsa, si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, en los demás casos la proposición es verdadera.

BICONDICIONAL O DOBLE IMPLICACIÓN

Una Bicondicional es una proposición donde “p es una condición necesaria y suficiente para q”. Su símbolo:

\leftrightarrow o \Leftrightarrow

Su enunciado compuesto: $p \leftrightarrow q$

Su significado: “...si y sólo si...”

Sea proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ Y se puede expresar: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Esto significa que p es verdadera si y solo si q es verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también lo es.

Ejemplo:

Apruebas la asignatura, si y solo si entrega las actividades escolares.

p: Apruebas la asignatura.

q: Entrega las actividades escolares.

Se representa: $p \leftrightarrow q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conclusión:

Las proposiciones condicionales solamente son verdaderas si tanto p como q son falsas o verdaderas.

RESUMEN

Recuerde que:

Una proposición es un enunciado del que se puede decir que es verdadero o falso.

El valor de verdad de una proposición es la veracidad o falsedad de está.

Una proposición compuesta, son dos proposiciones unidas mediante unos símbolos denominados conectivos lógicos.

La siguiente tabla muestra los diferentes conectivos de la lógica proposicional con su respectivo nombre, símbolo, notación y lectura.

NOMBRE	SÍMBOLO	NOTACIÓN	LECTURA
CONJUNCIÓN	\wedge	$p \wedge q$	p y q
DISYUNCIÓN	\vee	$p \vee q$	p o q
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA	\veebar	$p \veebar q$	p o q, pero no ambas
IMPLICACIÓN CONDICIONAL	\rightarrow	$p \rightarrow q$	p implica q Si p entonces q
DOBLE IMPLICACIÓN EQUIVALENCIA BICONDICIONAL	\leftrightarrow	$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q p es equivalente a q
NEGACIÓN	\neg	$\neg p$	No p; es falso que p

La siguiente tabla muestra los valores de verdad de las proposiciones compuestas para cada uno de los diferentes conectivos.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V

A partir de este momento, ya se está en condiciones de representar cualquier enunciado con conectores lógicos.

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado “Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si solo si soy desorganizado”

Dónde:

p: Pago la luz.

q: Me cortarán la corriente eléctrica.

r: Me quedaré sin dinero.

s: Pediré prestado.

t: Pagar la deuda.

w: soy desorganizado.

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \neg t] \leftrightarrow w$$

1.4. TABLAS DE VERDAD.

Teniendo en cuenta que la forma correcta de escribir una variable proposicional es la sintaxis y la semántica es lo que significa. En la lógica una variable proposicional une solamente dos valores de verdad V o F.

Para determinar de una variable proposicional, debemos seguir las reglas que se dieron en el tema conectores. Esto se hace mediante interpretación que son un conjunto de valores que se asignan a sus proposiciones simples o atómicas.

Al realizar la interpretación de variable proposicional se obtiene un valor de verdad V o F. Cada tabla tiene un número de interpretaciones que aparezcan en la familia.

El criterio para determinar cuántas interpretaciones posibles hay, tiene una formula 2^n donde n es el número de proposiciones simples.

Así la tabla de verdad de una fórmula que tenga 2 variables tendrá $2^2 = 4$ filas, una que tenga 3, $2^3 = 8$, etc.

Luego de calcular el número de filas se procede de la siguiente manera:

La columna 1 corresponde a la asignación de todas las combinaciones de valores de verdad posibles de las V o F que aparecen en la formula.

Calculo del valor de verdad de la negación de las V o F.

Calculo de los conectores binarios que afectan a los resultados del paso anterior o a negaciones.

Se calculan todos los conectivos binarios hasta llegar al conector principal.

El resultado de la tabla aparece reflejado en la última columna donde este el conector principal.

Ejemplo 1:

Construcción de tabla de verdad $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

Esta proposición compuesta tiene 2 proposiciones simples, por tanto $2^2 = 4$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Ejemplo 2: $[(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \wedge p)] \rightarrow r$

La proposición compuesta tiene las proposiciones simples p, q, r por tanto $2^3 = 8$

p	q	r	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$q \wedge p$	$[(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \wedge p)]$	$\rightarrow r$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V

El resultado de la tabla de verdad de una fórmula es la última columna. En este resultado pueden ocurrir tres casos:

- Que el resultado final de la tabla solo arroja signos V.
- El resultado final de la tabla solo arroja signos F.
- El resultado final presenta signos de V y signos de F indistintamente.



Se dice que es:

TAUTOLOGÍA:

Si y solo si su valor de verdad es siempre V, para toda interpretación posible. Esto significa que el resultado de la tabla arroja solo V en su columna final.

CONTRADICCIÓN:

Si la tabla de verdad arroja solamente F.

CONTINGENCIA:

Si y solo si su valor de verdad es falso para al menos una interpretación y V para al menos otra.

La cual se divide en:

Consistencia: Cuando la tabla de verdad arroja mayor cantidad de valores verdaderos que falsos.

Inconsistencia: Cuando la tabla de verdad arroja mayor cantidad de valores falsos que verdaderos.

RECORDEMOS SOBRE PROPOSICIONES.

p: Bogotá es la capital de Colombia

q: La CUN tiene sedes en Bogotá y Montería.

r: El número 3 es un dígito

s: $4+7=13$

t: La luna gira alrededor del sol

u: El producto de dos números pares es un numero par

A cada una de las afirmaciones anteriores podemos afirmar que es verdadero o falso, pero no ambas a la vez. En conclusión, podemos decir:

CONCEPTO CLAVE

Proposición simple es un enunciado declarativo del cual se puede afirmar que es verdadero o falso, pero NO ambas a la Vez.

Ahora leamos los siguientes enunciados;

a) Bogotá es la capital de Colombia y La CUN tiene sedes en Bogotá y Montería.

b) $4+6=15$ ó el número 7 es un dígito

Al analizar tanto el enunciado *a* como el *b*, están constituido por dos proposiciones simples, unidas por un conector (y/ó). Entonces concluimos.

CONCEPTO CLAVE

Proposición compuesta es un enunciado constituido por dos o más proposiciones simples, unidas por conectivos o conectores lógicos.

De todo lo anterior podemos deducir:

1. El lenguaje escrito está constituido por símbolos que se agrupan para formar expresiones que tiene sentido completo.
2. Las expresiones tienen significado, otras no.
3. Las proposiciones se representan con letras minúsculas (p,q,r, s,t,u,...)
4. Las proposiciones pueden ser negativas, entonces el símbolo utilizado anterior a la letra minúscula es \neg . $\neg r$: Ecuador no exporta banano