ÁREA DE CIENCIAS BÁSICAS

LÓGICA MATEMÁTICA

AUTOR: **Julio David Gil Quintero**
Ms. EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Julio.gil@campusucc.edu.co

TEMA: **Reseña histórica, definición de lógica, proposiciones y tablas de verdad**

OBJETIVOS:

1. **Distinguir los dos grandes períodos de la lógica y sus precursores.**
2. **Elaborar argumentos lógicamente válidos.**
3. **Simbolizar correctamente las proposiciones en el lenguaje lógico.**
4. **Construir proposiciones simples y compuestas.**

TIEMPO: 6 horas

CONDUCTA DE ENTRADA:

Analice si los siguientes argumentos son lógicamente válidos:

Argumento No 1

1. El perro es mamífero
2. Si el perro es mamífero entonces sus cachorros crecen saludables.
3. Si sus cachorros crecen saludables entonces tienen larga vida.

Conclusión: Los cachorros tienen larga vida

Argumento No 2

1. Bogotá es la capital de Colombia.
2. Si Bogotá es la capital de Colombia entonces su altura sobre el nivel del mar es de 2630 metros.
3. Si su altura sobre el nivel del mar es de 2630 metros entonces es de clima frío.

   Conclusión: Bogotá es de clima frío.

DESARROLLO DE LA TEMÁTICA

Reseña Histórica

En la historia de la lógica pueden distinguirse dos grandes períodos. El primero abarca desde la sistematización de le dio Aristóteles en el siglo IV a.c. en su libro Organón, en el que expresó las tres leyes básicas del pensamiento: El principio de identidad ($p \leftrightarrow p$), el de no contradicción ($\sim(p \wedge \sim p)$) y el de tercero excluido ($p \vee \sim p$). Este período, que termina a mediados del siglo XIX, es llamado el de la lógica clásica, tradicional o Aristotélica.

El segundo período, que empieza aproximadamente en 1850, y llega hasta nuestros días, se denomina el de la lógica simbólica, matemática o moderna.

Entre los precursores se pueden citar a George Boole (1815-1864) y August De Morgan (1806-1871). Posteriormente los trabajos de Gottlieb Frege (1848-1925) y de Guisepe Peano (1858-1932) sentaron las bases de la lógica moderna. Los aportes de éstos y otros lógicos fueron sistematizados y desarrollados en la obra Principia Mathemática por Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947). Luego con los resultados de Kurt Godel (1906-1978), en 1930 y 1931 se abre el camino de una nueva racionalidad científica que apenas estamos comenzando a comprender.

LÓGICA:

Definición: Es la ciencia de las formas del pensamiento (conceptos, juicios y raciocinios), de su estructura y de las leyes del conocimiento inferido, las cuales permiten obtener conclusiones a partir de proposiciones admitidas como verdaderas, llamadas premisas.

Generalmente se define la lógica como la ciencia que estudia el razonamiento, en el sentido de poder determinar si un argumento es válido o inválido. Entendiendo por argumento un conjunto de enunciados en el cual uno de ellos, llamado conclusión, se afirma con base en los otros, llamados premisas.

Un argumento puede ser valorado desde al menos tres puntos de vistas diferentes:

1. Valoración lógica, tiene que ver con la conexión que hay entre las premisas y la conclusión.
2. Valoración epistemológica o material, tiene que ver con la veracidad de las premisas y de la conclusión.
3. Valoración retórica, tiene que ver con que el argumento sea persuasivo, atractivo e interesante.

Aclaremos los puntos de vista con un ejemplo:

Argumento No 1

1. Dios existe
2. Si Dios existe entonces el hombre fue creado por Dios
3. Si el hombre fue creado por Dios entonces es mortal

Conclusión: El hombre es mortal

Argumento No 2

1. Dios no existe
2. Si Dios no existe entonces no hay vida eterna
3. Si no hay vida eterna entonces el alma es mortal

Conclusión: El alma es mortal

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

Los dos argumentos son lógicamente válidos porque siguen las reglas de nuestro sistema lógico; pero sólo uno de ellos es materialmente válido ya que las proposiciones 1 de ambos, no pueden ser simultáneamente verdaderas.
La valoración retórica resulta ser muy subjetiva, en el sentido lo que para alguien es bello o interesante, no lo es tanto, para otro.

Proposición

Definición: Es todo enunciado declarativo afirmativo al que se le puede asignar uno de dos valores, verdadero o falso. Generalmente se simbolizan con letras cursivas minúsculas.
Existen dos clases:
Proposición simple o atómica y proposición compuesta o molecular.

Proposición Simple: Es la representación lógica de cualquier enunciado declarativo afirmativo que puede ser verdadero o falso. Este tipo de oraciones no utilizan conectores lógicos.
Ejemplos:
El computador es una herramienta tecnológica
7 + 5 = 14
Aristóteles es uno de los padres de la lógica
La luna gira alrededor de la tierra
Santa Marta es la capital del Atlántico

No son proposiciones los enunciados interrogativos ni los enunciados imperativos (expresan orden o mandato), y en general todo enunciado del que no pueda decirse que sea verdadero o falso.

Proposición Compuesta: Es todo enunciado formado por dos o más proposiciones simples adecuadamente enlazadas, o por una sola proposición simple, negada.

Ejemplos:

La tierra es un planeta y el sol es una estrella.

Si el computador no funciona, o está dañado o está desconfigurado.

Estoy programando y bajando un archivo de internet.

3 es par ó 4 es primo si y solo si 7 es primo y 6 es par.

Si Medellín es la capital de Antioquia entonces Bucaramanga es la capital de Santander o de la Guajira.

Existen seis tipos fundamentales de conectivos lógicos: Negación, disyunción, disyunción exclusiva, conjunción, condicional o implicación y bicondicional.

Negación: (~) (¬)

Ejemplo:

p≡ La luna gira alrededor de la tierra (V)

~p≡ La luna no gira alrededor de la tierra (F)

Tabla de verdad

p	~p
V	F
F	V

Disyunción: (v), que se lee o. Es F cuando las dos proposiciones son F

Ejemplo:

p≡ España es un país europeo, y

q≡ Barcelona es la capital de España. Entonces:

p v q≡ España es un país europeo o Barcelona es la capital de España.

Tabla de verdad

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción Exclusiva: (w). Es F cuando las proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo:

p≡ Shakespeare escribió "El Quijote", y

q≡ Cervantes escribió "El Quijote". Entonces:

p w q≡ O Shakespeare o Cervantes escribió "El Quijote"

Ejemplo:

p≡ Cuatro es un número par, y

q≡ Cuatro es un número impar. Entonces:

p w q ≡ O cuatro es un número par o impar

Tabla de verdad

p	q	p w q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción: (˄), que se lee "y". Es V cuando ambas proposiciones son verdaderas.

Ejemplo:

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

p≡ Bolívar era venezolano, y

q≡ Nariño era colombiano. Entonces:

p ^ q≡ Bolívar era venezolano y Nariño era colombiano.

Ejemplo:

p≡ Sandra es hermana de Juan, y

q≡ Claudia es hermana de Juan. Entonces:

p ^ q≡ Sandra y Claudia son hermanas de Juan

Tabla de verdad

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Condicional: (→), que se lee “entonces”. Es F cuando el antecedente es V y el consecuente es F.

Ejemplo:

p≡ El sol sale todos los días, y

q≡ La luna sale todas las noches. Entonces:

p → q≡ Si el sol sale todos los días entonces la luna sale todas las noches

Ejemplo:

p≡ los peces viven en el agua, y

q≡ Los canarios viven en el agua. Entonces:

p → q≡ Si los peces viven en el agua, los canarios también

Tabla de verdad

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional: (↔), que se lee “si y solo si”. Es V cuando las proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo:

p≡ La llave está abierta, y

q≡ El nivel del agua está subiendo. Entonces:

p ↔ q≡ La llave está abierta si y solo si el nivel del agua está subiendo.

Ejemplo:

p≡ Nueva York tiene la misma hora que Bogotá, y

q≡ Nueva York se encuentra en el mismo huso horario que Bogotá. Entonces:

p ↔ q≡ Nueva York tiene la misma hora que Bogotá si y solamente si se encuentra en el mismo huso horario que Bogotá.

Tabla de verdad

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

POTENCIA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

1. La negación es la de menor potencia
2. La disyunción, conjunción y disyunción exclusiva, tienen igual potencia y son más fuertes que la negación.
3. La condicional y bicondicional, tienen igual potencia y son más fuertes que los demás conectivos lógicos.

Ejemplos:

En el enunciado: “No hay frutas rojas y no hay palomas amarillas”

$\sim p \wedge \sim q$

El enunciado es una conjunción.

En el enunciado:” Si las pelirrojas son groseras o las rubias son pecosas entonces la lógica es confusa y la filosofía es incomprensible”

$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

El enunciado es una condicional

En el enunciado: “Si Bogotá y Medellín son ciudades colombianas entonces sus habitantes son cachacos o paisas”

$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

El enunciado es una condicional

En el enunciado: “Caminar es un buen ejercicio si y sólo si se hace durante más de veinte minutos y se realiza rápidamente”

$p \leftrightarrow (q \wedge r)$

El enunciado es bicondicional

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

En el enunciado: “Si hay claridad entonces es de día, y si hay oscuridad entonces es de noche”

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$

El enunciado es conjunción.

En el enunciado: $\sim[a \rightarrow (b \wedge c)]$

El enunciado es una negación.

En el enunciado: $\sim a \wedge [(a \vee \sim b) \rightarrow \sim c]$

El enunciado es conjunción.

En el enunciado: $(a \leftrightarrow \sim b) \vee (b \rightarrow c)$

El enunciado es disyunción.

TABLAS DE VERDAD

Es un diagrama que permite determinar cuándo es falsa y cuándo es verdadera una proposición compuesta.

$2^n: combinaciones\ posibles\ de\ valores\ de\ verdad$

Donde n es el número de proposiciones simples que tiene la proposición compuesta, y el 2 es una constante (valores de verdad de una proposición f ó v)

Si la proposición compuesta tiene 2 proposiciones simples, entonces:

$2^2 = 4\ combinaciones\ posibles\ de\ valores\ de\ verdad$

1. Las dos proposiciones son verdaderas
2. La primera proposición es verdadera y la segunda falsa
3. La primera proposición es falsa y la segunda verdadera
4. Las dos proposiciones son falsas

p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

Si la proposición compuesta tiene 3 proposiciones simples, entonces:

$2^3 = 8\ combinaciones\ \ posibles\ de\ valores\ de\ verdad$

p	q	r
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

Si la proposición compuesta tiene 4 proposiciones simples, entonces:

$2^4 = 16\ combinaciones\ posibles\ de\ valores\ de\ verdad$

p	q	r	s
v	v	v	v
v	v	v	f
v	v	f	v
v	v	f	f
v	f	v	v

v	f	v	f
v	f	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	v	v	f
f	v	f	v
f	v	f	f
f	f	v	v
f	f	v	f
f	f	f	v
f	f	f	f

Tautología: Es una proposición compuesta que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la constituyen.

Contradicción: Es una proposición compuesta que siempre es falsa, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la constituyen.

Indeterminación o contingencia: Es una proposición compuesta que puede ser verdadera o falsa, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la constituyen.

Ejemplos:

Determinar si los siguientes esquemas proposicionales son tautología, contradicción o indeterminación

a) $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim q$

Como tenemos 2 proposiciones simples, entonces:

$2^2 = 4\ combinaciones\ posibles\ de\ valores\ de\ verdad$

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q)$	$(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim q$
v	v	f	f	f	v
v	f	f	v	f	v
f	v	v	f	v	f
f	f	v	v	f	v

El esquema proposicional es una indeterminación.

b) $(\sim a \rightarrow b) \leftrightarrow (b \vee a)$

a	b	$\sim a$	$(\sim a \rightarrow b)$	$(b \vee a)$	$(\sim a \rightarrow b) \leftrightarrow (b \vee a)$
v	v	f	v	v	v
v	f	f	v	v	v
f	v	v	v	v	v
f	f	v	f	f	v

El esquema proposicional es una tautología.

c) $\sim[(p \wedge \sim q) \veebar (\sim q \rightarrow r)]$

p	q	r	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(\sim q \rightarrow r)$	$[(p \wedge \sim q) \veebar (\sim q \rightarrow r)]$	$\sim[(p \wedge \sim q) \veebar (\sim q \rightarrow r)]$
v	v	v	f	f	v	v	f
v	v	f	f	f	v	v	f
v	f	v	v	v	v	f	v
v	f	f	v	v	f	v	f
f	v	v	f	f	v	v	f
f	v	f	f	f	v	v	f
f	f	v	v	f	v	v	f
f	f	f	v	f	f	f	v

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

El esquema proposicional es una indeterminación.

APLICACIONES TEÓRICO - PRÁCTICA

1. Construir tres argumentos lógicamente válidos que tengan cuatro premisas.

2. Basado en la realidad y en las tablas, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

a) Si Bogotá es la capital de Colombia entonces Medellín es la capital de Antioquia o Guajira.

b) Dos es un número par o impar si y sólo si 7 es primo ó 8 es impar

3. Sean: p: v, q: f y r: v, determinar el valor de verdad de los siguientes esquemas proposicionales:

a) $\sim p \wedge (q \leftrightarrow r)$

b) $\sim[(p\ w\ q) \rightarrow (\sim r \wedge \sim q)]$

4. Dadas las proposiciones p: está lloviendo, q: hace sol, r: hace frío; escriba en el lenguaje natural:

a) $\sim p \rightarrow q$

b) $p \wedge (q \rightarrow r)$

c) $\sim(p \rightarrow \sim q)$

d) $p \leftrightarrow (q \wedge r)$

5. Exprese en lenguaje simbólico cada una de las siguientes proposiciones:

a) Tres es un número impar y positivo

b) Voy a la universidad o a cine

c) Estudio y no trabajo

d) O voy al parque o a cine

e) Ni estudio ni trabajo

f) Llueve o no abro el paraguas

g) Si dos es un número par entonces 7 es primo

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

h) Si pedro es bachiller entonces aprobó décimo grado.

i) Si estudio, veo televisión o duermo

j) Salgo de vacaciones, si desarrollo el contrato

k) Saco el paraguas y el abrigo cada vez que llueve.

6. Si x e y son números reales, verifique si la proposición dada es verdadera, si es falsa dar un caso que no se cumpla (contraejemplo).

a) $Si\ x > 0\ entonces\ existe\ y\ tal\ que\ x > y > 0$

b) $Si\ x > 3\ entonces\ x > 4$

c) $x > y\ si\ y\ sólo\ si\ x^2 > y^2$

7. Si x e y son números naturales, verifique si la proposición dada es verdadera, si es falsa dar un caso que no se cumpla (contraejemplo).

a) $Si\ x = y\ entonces\ x + y\ es\ par$

b) $Si\ x + y\ es\ par\ entonces\ x = y$

c) $Si\ x\ e\ y\ son\ pares\ entonces\ x + 3y\ es\ par$

d) $Si\ x + 3y\ es\ par\ entonces\ x\ e\ y\ son\ pares$

8. Determinar si los siguientes esquemas proposicionales son tautología, contradicción o indeterminación

a) $[p \veebar (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

b) $\sim [p \vee (q \leftrightarrow \sim r)] \rightarrow (p \wedge \sim q)$

c) $(p \wedge \sim r) \rightarrow [\sim p \vee (q \leftrightarrow s)]$

Elaboró:	Revisó:	Aprobó:

BIBLIOGRAFÍA

- Grimaldi, R. Matemática discreta y combinatoria. Editorial:
- DI PRISCO C. Introducción a la lógica matemática. Amalca Amazonia. 2009
- PALAU, G. Lógicas condicionales y razonamiento de sentido común. Barcelona: Editorial Gedisa, 2004, 1ra Edición.
- García, F. Problemas resueltos de matemática discreta. Editorial: Thomson. 2003

Elaboró:	Revisó:	Aprobó: